AM3590 2020-11-19

COMPACTHEID EN CONVERGENTIE

CONV. VAN RIJEN:

$x_n \longrightarrow x$: VOOR ELKE OMG. U VAN x IS ER EEN N MET $n > N \longrightarrow x_n \in U$.

PROBLEEM:

RIJEN VOLDOEN NIET MEER

- GEEN KAR. VAN AFSLUITING
- ——— " ——— (GESLOTEN)
- ——— " ——— CONTINUÏTEIT

DEFINITIE:

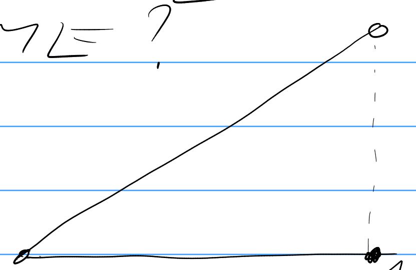
EEN RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ IS compact ALS ELKE open OVERDEKKING EEN EINDIGE DEELOVERDEKKING HEEFT.

DUS ALS $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ EN $X = \bigcup \mathcal{U}$ DAN IS ER EEN EINDIGE $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ MET $X = \bigcup \mathcal{V}$

- ALS X compact EN $f: X \to \mathbb{R}$ CONTINU DAN NEEMT f op X EEN MAX. EN MIN AAN.

ONDER ALLE KROMMEN MET VAST LENGTE ℓ SLUIT DE CIRKEL DE GROOTSTE OPP. IN.

- "ALS HET GEEN CIRKEL IS IS DE OPP. NIET MAXIMAAL".
- DUS DE CIRKEL IS OPTIMAAL.
- IS ER WEL EEN OPTIMALE KROMME?



"ALS $x < 1$ DAN IS $f(x)$ NIET MAXIMAAL."
DUS $f(1)$ IS HET MAXIMUM.
ER IS HELEMAAL GEEN MAXIMUM!

DE GESLOTEN KROMMEN MET LENGTE ℓ VORMEN EEN COMPACTE VERZ. EN DE OPP. IS EEN CONTINUE FUNCTIE OP DIE VERZ.

NB IN VEEL BOEKEN IS HAUSDORFF (T_2) BIJ COMPACTHEID INBEGREPEN.

ALS $(X, \mathcal{T})$ EEN RUIMTE IS EN $A \subseteq X$ DAN IS

$$\mathcal{T}_A = \{ O \cap A : O \in \mathcal{T} \}$$

EEN TOPOLOGIE OP A: DE <u>DEELRUIMTE</u> <u>TOPOLOGIE</u>

"A IS COMPACT" KAN BETEKENEN
- DE DEELRUIMTE $(A, \mathcal{T}_A)$ IS COMPACT

– ALS $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ EN $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$
DAN IS ER EEN EINDIGE $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$
MET $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$

GELUKKIG: DE UITSPRAKEN ZIJN EQUIVALENT. [OPGAVE]

"COMPACTHEID IS ABSOLUUT"

T_2 IS HET NIET:
$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$

$\{0,1\}$ ALS DEELRUIMTE: T_2
WANT DISCREET
$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ ZIJN OPEN
IN $\{0,1\}$

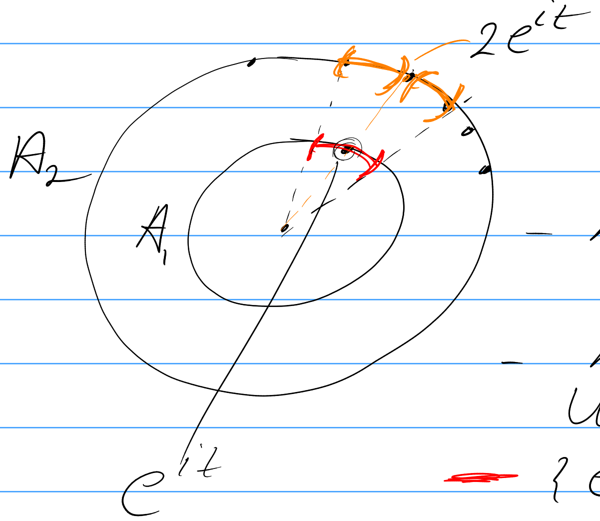
0 EN 1 HEBBEN IN DE GROTE RUIMTE GEEN DISJ OMG'N.

KARAKTERISERING:
$(X, \mathcal{T})$ IS COMPACT
DESDA
VOOR ELKE FAMILIE GESLOTEN VERZ'N $\mathcal{F}$ MET $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$
IS ER EEN EINDIGE $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$
MET $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$.

[DE WETTEN VAN DE MORGAN]
CONTRAPOSITIE ($A \Rightarrow B$ GELIJKW. $\neg B \Rightarrow \neg A$)

$(X, \mathcal{T})$ IS COMPACT DESDA VOOR ELKE FAMILIE GESLOTEN VERZ'N $\mathfrak{F}$ MET DE EINDIGE-DOORSNEDE EIGENSCHAP.
ALS $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{F}$ EINDIG DAN $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$
GELDT $\bigcap \mathfrak{F} \neq \emptyset$

VOORBEELDEN

- ALLES WAT JE KENT UIT ANALYSE 1, ANALYSE 2, REËLE ANALYSE.
- ELKE EINDIGE RUIMTE IS COMPACT.
- $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$ IS COMPACT.
  STEL $\mathbb{N} = \bigcup \mathcal{U}$
  NEEM $U \in \mathcal{U}$ MET $1 \in U$
  MAAR $\mathbb{N} \setminus U$ IS EINDIG.
  NEEM VOOR ELKE $n \in \mathbb{N} \setminus U$ EEN $U_n \in \mathcal{U}$ MET $n \in U_n$
  DAN IS $\mathcal{V} = \{U\} \cup \{U_n : n \in \mathbb{N} \setminus U\}$ EINDIG EN $\bigcup \mathcal{V} = \mathbb{N}$.
- 

$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ of } |z| = 2\}$

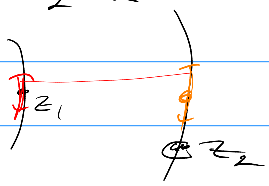
- ALS $|z| = 2$
  $\mathcal{B}_z = \{\{z\}\}$
- ALS $z = e^{it}$
  $U(z,n) = \{e^{is} : |s-t| < 2^{-n}\} \cup \{2e^{is} : 0 < |s-t| < 2^{-n}\}$

"DE DUBBELE CIRKEL VAN ALEXANDROFF".

- T_2
- COMPACT.

T_2: $z_1, z_2 \in A$ VERSCHILLEND

- $|z_1| = |z_2| = 2$ DUIDELIJK $\{z_1\} \cap \{z_2\} = \emptyset$
- $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$
  - $z_1 = e^{it}$, $z_2 = 2e^{is}$ $s \neq t$ (MOD 2π)



NEEM n ZO GROOT DAT $2^{-n} < |s-t|$

DAN $U(z_1, n) \cap \{z_2\} = \emptyset$

  - $z_1 = e^{it}$, $z_2 = 2e^{it}$

$U(z_1, 1) \cap \{z_2\} = \emptyset$

- $|z_1| = |z_2| = 1$

e^{it} e^{is} $s \neq t$

$2^{-n} < |s-t|$

$U(z_1, n+1) \cap U(z_2, n+1) = \emptyset$

COMPACT: STEL $A = \bigcup \mathcal{U}$

WE MAKEN EEN 'MOOIERE' OVERDEKKING:

VOOR z MET $|z| = 1$ KIEZEN WE $U_z \in \mathcal{U}$ EN n_z MET

$U(z, n_z) \subseteq U_z$

- DAN GELDT:

$$A_1 \subseteq \bigcup_{z \in A_1} U(z, n_z)$$

DE DEELRUIMTE A_1 VAN A IS GEWOON DE EENHEIDSCIRKEL

DIE IS COMPACT.

ER ZIJN DUS $z_1, \ldots, z_k$

MET $A_1 \subseteq U(z_1, n_{z_1}) \cup \dots \cup U(z_k, n_{z_k})$

$(2z_1 \notin)$

NU:

$$A_2 \setminus \{2z_1, 2z_2, \dots, 2z_k\}$$
$$\subseteq U(z_1, n_1) \cup \dots \cup U(z_k, n_k)$$

NEEM NOG

$$V_1, \dots, V_k \in \mathcal{U}$$

MET $2z_i \in V_i$.

DAN IS

$$\{U_{z_1}, \dots, U_{z_k}\} \cup \{V_1, \dots, V_k\}$$

EEN EINDIGE DEELOVERD. VAN $\mathcal{U}$.

STELLING:

ALS $f: X \longrightarrow Y$ CONTINU IS EN X IS COMPACT DAN IS $f[X]$ OOK COMPACT.

BEWIJS

NEEM $\mathcal{U}$ OPEN VERZ'N IN Y MET $f[X] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$

MAAK DAARBIJ

$$\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$$

DAT IS EEN OPEN OVERD. VAN X MET EINDIGE DEELOVERD.

$$\mathcal{V}' = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}'\}$$

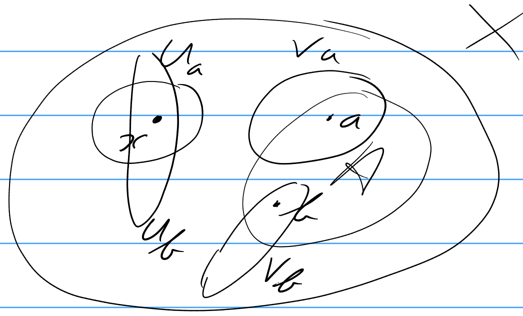
MAAR DAN

$$f[X] \subseteq \bigcup \mathcal{U}' \qquad \square$$

ALS $Y = \mathbb{R}$ GEEFT DIT DE MAX-MIN STELLING:

$f[X]$ IS GESLOTEN EN BEGRENSD.

1. ALS X EEN HAUSDORFFRUIMTE IS EN $A \subseteq X$ IS COMPACT DAN IS A GESLOTEN.



NEEM $x \in X \setminus A$ VAST
VOOR ELKE $a \in A$
NEEM
$U_a \ni x$ EN $V_a \ni a$
OPEN EN DISJUNCT.
A IS COMPACT: ER ZIJN $a_1, \dots, a_k$ IN A
ZÓDAT $A \subseteq V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_k}$
DAN IS $O_x = U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_k}$ OPEN EN $x \in O_x$
ER GELDT:

$$\underline{\underline{O_x}} \cap \underline{\underline{(V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_k})}} = \emptyset$$

ZEKER

$$O_x \cap A = \emptyset$$

[IN $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$ IS ELKE DEELVERZ COMPACT DUS OOK $2\mathbb{N}$
$2\mathbb{N}$ IS NIET GESLOTEN]

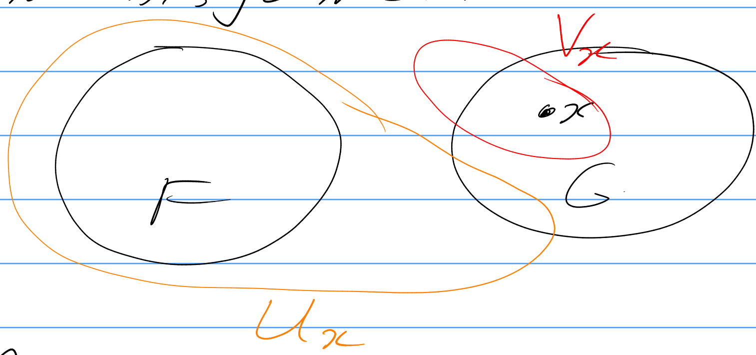
STELLING
ALS X COMPACT IS EN $F \subseteq X$ GESLOTEN
DAN IS F COMPACT.
STEL $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$
BEKIJK $\mathcal{U}^+ = \underline{\mathcal{U}} \cup \{X \setminus F\}$
- OPEN OVERD. VAN X
- EINDIGE DEELOVERD:
  $\{X \setminus F\} \cup \{U_1, \dots, U_k\} \quad U_i \in \mathcal{U}$
- DAN $F \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k$. $\square$

! STELLING
ELKE COMPACTE HAUSDORFF RUIMTE IS NORMAAL.

BEWIJS

① DE RUIMTE IS REGULIER.
DAT WETEN WE AL.
STEL F IS GESLOTEN $x \in F$
ER GELDT: F IS COMPACT
HET BEWIJS VAN "COMPACT → GESLOTEN"
LEVERT DISJUNCTE OPEN O EN V
MET $x \in O$ EN $F \subseteq V$.

② DE RUIMTE IS NORMAAL.
STEL F EN G ZIJN GESLOTEN
EN DISJUNCT.



- DAN GELDT DUS $x \notin \overline{U_x}$
- DOE DIT VOOR ELKE $x \in G$.

DAN GELDT

$$G \cap \bigcap_{x \in G} \overline{U_x} = \emptyset$$

COMPACTHEID:
ER ZIJN $x_1, \ldots, x_k \in G$
MET

$$G \cap \bigcap_{i=1}^{k} \overline{U_{x_i}} = \emptyset$$

NU $F \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} U_{x_i} \overset{\text{DEF}}{=} U$

$\overline{U} \subseteq \overline{U_{x_i}}$ voor $i = 1, \dots, k$

CONCLUSIE $\overline{U} \cap G = \emptyset$

$V = X \setminus \overline{U}$ is open

$F \subseteq U$, $G \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

VOLGENDE KEER:

CONVERGENTIE VAN FILTERS