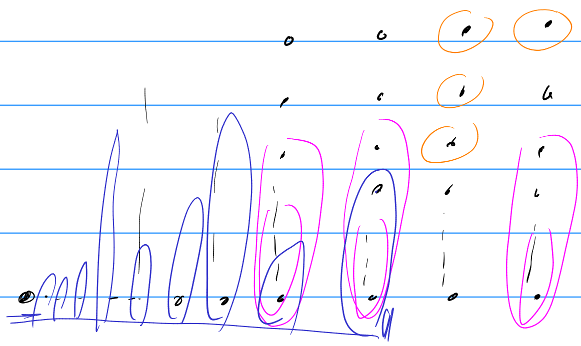
CONVERGENTIE : FILTERS

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(2^{-n},0) : n \in \mathbb{N}\}$$
$$\cup \{(2^{-n},2^{-m}) : n,m \in \mathbb{N}\}$$



$$\mathcal{B}_{(n,m)} = \{ \{(2^{-n},2^{-m})\} \}$$
$$\mathcal{B}_n = \{ \{(2^{-n},0)\} \cup \{(2^{-n},2^{-k}) : k \geq m\} : m \in \mathbb{N} \}$$

$$\mathcal{B}_0 = \{ U(f,n) : n \in \mathbb{N},\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$$

$$U(f,n) = \{(0,0)\}$$
$$\cup \{(2^{-k},0) : k \geq n\}$$
$$\cup \{(2^{-k},2^{-l}) : k \geq n,\ l \geq f(k)\}$$

$$A = \{(2^{-k},2^{-l}) : k,l \in \mathbb{N}\}$$

- $(0,0) \in \overline{A}$
- ER IS GEEN RIJ IN A DIE NAAR $(0,0)$ CONVERGEERT.

FILTERS (NETTEN)

FILTER op X:
FAMILIE $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- $F, G \in \mathcal{F} \to F \cap G \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F}, G \supseteq F \to G \in \mathcal{F}$

- $\{X\}$
- $x \in X$: $\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : x \in F\}$
  $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$: $\mathcal{F}_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$
- X ONEINDIG:
  $\mathcal{F} = \{A : X \setminus A$ EINDIG$\}$
  FRÉCHETFILTER
- op $\mathbb{R}$: $\{F \subseteq \mathbb{R} : \mu^*(\mathbb{R} \setminus F) < \infty\}$
- op $\mathbb{N}$: $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} 1/n < \infty\}$

$\mathcal{F} = \{F : \mathbb{N} \setminus F \in \mathcal{I}\}$ IS EEN FILTER

($\mathcal{I}$ IS EEN IDEAAL
$X \notin \mathcal{I}$, $\mathcal{I} \neq \emptyset$
$A, B \in \mathcal{I} \to A \cup B \in \mathcal{I}$
$A \in \mathcal{I}$, $B \subseteq A \to B \in \mathcal{I}$)

$(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ IS EEN RING.

Δ: OPTELLING, $\cap$: VERM.

BOOLESE RING

$(X, \mathcal{T})$ TOPOLOGISCHE RUIMTE

NEEM $x \in X$
$\mathcal{U}(x)$, DE FAMILIE VAN ALLE OMGEVINGEN IS EEN FILTER

$U \ni x$ IS EEN OMG:
ER IS EEN OPEN O
MET $x \in O \subseteq U$

ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER IS EN $x \in X$
DAN: $\mathcal{F}$ CONVERGEERT NAAR x
($\mathcal{F} \longrightarrow x$) ALS $\underline{\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}}$

NEEM EEN RIJ $(x_n)_n$ IN X.
DE RIJ BEPAALT EEN FILTER:
$\mathcal{F} = \{ F :$ ER IS EEN n MET $\{x_m : m \geq n\} \subseteq F \}$

$\mathcal{F} \longrightarrow x$ DESDA $x_n \to x$

$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists n\ \{x_m : m \geq n\} \subseteq U$ $\quad$ $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists n\ \{x_m : m \geq n\} \subseteq U$

$\underline{\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F} \iff (\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists F \in \mathcal{F})(F \subseteq U)}$

BASIS VOOR EEN FILTER:
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ MET VOOR ELKE $F \in \mathcal{F}$ IS ER EEN $B \in \mathcal{B}$ MET $B \subseteq F$.

$\mathcal{B} = \{ \{x_m : m \geq n\} : n \in \mathbb{N} \}$ IS EEN BASIS.

$f : X \longrightarrow Y$, $\mathcal{F}$ FILTER op X

$$f(\mathcal{F}) = \{ A \subseteq Y : f^{-1}[A] \in \mathcal{F} \}$$
$$= \{ A \subseteq Y : (\exists F \in \mathcal{F})\ (f[F] \subseteq A) \}$$

BEELD<u>FILTER</u>

$(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ TOP. RUIMTEN

$f : X \longrightarrow Y$

- f CONTINU IN x
  VOOR ELK FILTER $\mathcal{F}$ OP X
  ALS $\mathcal{F} \longrightarrow x$
  DAN $f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$.

$\Rightarrow$ • ALS $\mathcal{F} \longrightarrow x$
DAN $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$
NEEM EEN OMG V VAN $f(x)$
DAN $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}(x)$
EN DUS $f^{-1}[V] \in \mathcal{F}$
DUS $V \in f(\mathcal{F})$: $f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$

$\Leftarrow$ IHB $\mathcal{U}(x) \longrightarrow x$
DUS $f(\mathcal{U}(x)) \longrightarrow f(x)$
DUS $\mathcal{U}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{U}(x))$
$\forall V \in \mathcal{U}(f(x))$ $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}(x)$: CONTINUITEIT.

• ALS $A \subseteq X$ DAN
$x \in \overline{A}$ $\Longleftrightarrow$ ER IS EEN FILTER $\mathcal{F}$ MET $A \in \mathcal{F}$ EN $\mathcal{F} \longrightarrow x$

$\Rightarrow$ VOOR ELKE $U \in \mathcal{U}(x)$: $U \cap A \neq \emptyset$
$\mathcal{F} = \{F : (\exists U \in \mathcal{U}(x))(\underline{U \cap A} \subseteq F)\}$
- FILTER
- $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ $\quad \mathcal{F} \to x$

$\Leftarrow$ $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ <u>DUS</u> $U \cap A \neq \emptyset$ VOOR ALLE $U \in \mathcal{U}(x)$

METRISCHE RUIMTE IS COMPACT
DESDA:
ELKE RIJ HEEFT CONV. DEELRIJ

$(x_n)_n$ --- $(x_{n_k})_k$ DEELRIJ

$\mathcal{F} = \{F : \exists m \ \{x_n : n \geq m\} \subseteq F\}$

$\mathcal{G} = \{G : \exists k \ \{x_{n_l} : l \geq k\} \subseteq G\}$

ER GELDT $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

$\{x_{n_l} : l \geq k\} \subseteq \{x_n : n \geq n_k\}$

$\mathcal{F}$ IS GROVER DAN $\mathcal{G}$
$\mathcal{G}$ IS FIJNER DAN $\mathcal{F}$

STELLING:
$(X, \mathcal{T})$ IS COMPACT $\iff$
VOOR ELKE FILTER IS ER EEN FIJNER FILTER DAT CONVERGEERT.

$\Rightarrow$ STEL $\mathcal{F}$ IS EEN FILTER.
BEKIJK $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$
- GESLOTEN VERZ'N
- EINDIG VEEL: DOORSNEDE NIET LEEG.

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{m} F_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} \overline{F_i}$$

- COMPACTHEID: $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$

NEEM $x \in \bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\}$

NU GELDT:

VOOR ELKE $U \in \mathcal{U}(x)$

VOOR ELKE $F \in \mathcal{F}$

$$U \cap F \neq \emptyset$$

$$\mathcal{G} = \{G : \exists U \in \mathcal{U}(x)\ \exists F \in \mathcal{F}\ U \cap F \subseteq G\}$$

($\mathcal{F}_x$ WERKT NIET ALS $x \notin \bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\}$)

- $\mathcal{G}$ IS EEN FILTER
- $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$ DUS $\mathcal{G} \to x$
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

$\Longleftarrow$ STEL $\mathcal{F}$ IS EEN FAMILIE GESLOTEN VERZ'N ZÓ DAT ALS $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ DAN $F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$

"EINDIGE-DOORSNEDE-EIGENSCHAP"

T.B. $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$

- DIE FAMILIE BEPAALT EEN FILTER: $\mathcal{G}$:

  $G \in \mathcal{G} \iff$ ER ZIJN $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ $F_1 \cap \ldots \cap F_n \subseteq G$.

  NB $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

- ER IS EEN FILTER $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{G}$

  ER IS EEN x:

  $$\mathcal{H} \longrightarrow x$$

  - $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$
  - $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{H}$
  - DAN $U \cap F \neq \emptyset$ ($U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}$)

  $F \in \mathcal{F}$ VAST: $x \in \overline{F} = F$

  $$x \in \bigcap \mathcal{F}$$

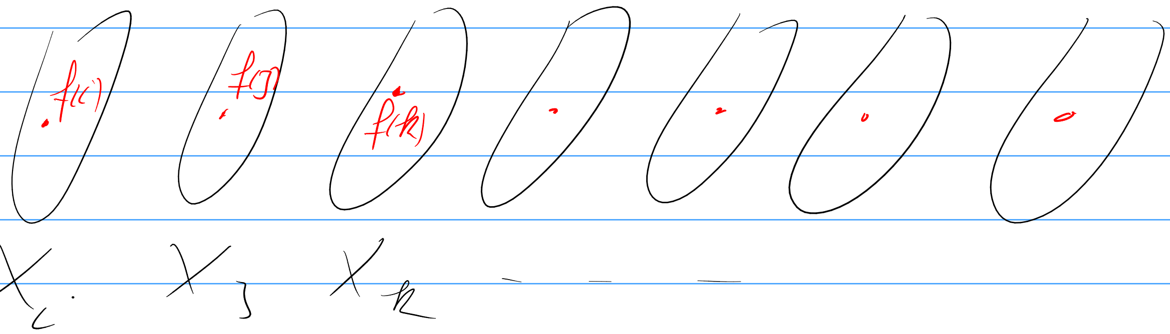
ULTRAFILTER

$\mathcal{U}$ IS EEN ULTRAFILTER :
- $\mathcal{U}$ IS EEN FILTER
- ALS $\mathcal{G}$ EEN FILTER IS EN $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$
  DAN $\mathcal{G} = \mathcal{U}$.
  "ER IS GEEN FIJNER FILTER"

$\mathcal{F}_x = \{ F : x \in F \}$.
ALS $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}_x$ EN $G \in \mathcal{G}$
DAN $G \cap \{x\} \neq \emptyset$ DUS $G \in \mathcal{F}_x$.

ULTRAFILTERS NIET VAN DE VORM $\mathcal{F}_x$?
JA ALS JE HET KEUZEAXIOMA AANNEEMT.

KEUZEAXIOMA: ALS $\{X_i : i \in I\}$
EEN FAMILIE NIET-LEGE VERZ'N
IS DAN IS ER EEN FUNCTIE
$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$
MET $f(i) \in X(i)$ VOOR ALLE i.



f HEET EEN KEUZEFUNCTIE

f IS NIET GECONSTRUEERD
"HIJ IS ER"

VIA EEN EQUIVALENTE UITSPRAAK LEMMA VAN ZORN. NIET-LEGE

- ALS $\mathbb{F}$ EEN FAMILIE FILTERS IS MET: ALS $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{F}$ DAN $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ OF $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

DAN IS $\bigcup \mathbb{F}$ OOK EEN FILTER.

$\emptyset \notin \bigcup \mathbb{F}$, $\bigcup \mathbb{F} \neq \emptyset$

$F \in \bigcup \mathbb{F}$, $G \supseteq F \to G \in \bigcup \mathbb{F}$

$F \in \mathcal{F}$ $\quad G \in \mathcal{F}$

$F, G \in \bigcup \mathbb{F}$

$F \in \mathcal{F}$ $\quad G \in \mathcal{G}$

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ OF $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

$\Downarrow$

$F, G \in \mathcal{G}$: $F \cap G \in \mathcal{G} \subseteq \bigcup \mathbb{F}$

ZORN: ER IS EEN MAXIMAAL FILTER.

ELK FILTER ZIT IN EEN MAXIMAAL FILTER.

MEER: ZIE HET VU-DICTAAT op BS.

VOLGENDE KEER

- PRODUCTTOPOLOGIE
- STELLING VAN TYCHONOFF