AM 3590 2020-11-26 ①

X IS COMPACT $\Longleftrightarrow$ VOOR ELK FILTER IS ER EEN FIJNER DAT CONVERGEERT.

ULTRAFILTER: GEEN ECHT FIJNER FILTER

X COMPACT $\Rightarrow$ ELK ULTRAFILTER CONVERGEERT

$\mathcal{F}_x = \{A : x \in A\}$ CONVERGEERT NATUURLIJK NAAR $x$.

ULTRAFILTERSTELLING:
ELK FILTER KAN UITGEBREID WORDEN TOT EEN ULTRAFILTER.

BEWIJS: VIA LEMMA VAN ZORN.

ULTRAFILTERSTELLING IMPLICEERT:
X IS COMPACT $\Longleftrightarrow$ ELK ULTRAFILTER op X CONVERGEERT.

$\Rightarrow$ DUIDELIJK

$\Leftarrow$ GEGEVEN $\mathcal{F}$ NEEM EEN UF $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$; DAT CONVERGEERT.

① ALS $\{X_i : i \in I\}$ EEN FAMILIE VERZ'N IS DAN IS

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ f : \begin{array}{l} f \text{ FUNCTIE} \\ \operatorname{DOM} f = I \\ f(i) \in X_i \text{ ALLE } i \end{array} \right\}$$

HET CARTESISCH PRODUCT VAN DE FAMILIE.

$\prod_{n\in\mathbb{N}} [0,n]$ -- ALLE RIJEN $(x_n : n\in\mathbb{N})$
MET $0 \le x_n \le n$ $(n\in\mathbb{N})$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ OOK EEN PRODUCT

$\mathbb{R}^{[0,1]}$

$\prod \underbrace{\{X : X \subseteq \mathbb{R},\ X \neq \emptyset\}}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\setminus\{\emptyset\}}$ — $f : \mathcal{P}(\mathbb{R})\setminus\{\emptyset\} \to \mathbb{R}$
$f(X) \in X$

KEUZEAXIOMA [1904, ZERMELO]
ALS $X_i \neq \emptyset$ VOOR ALLE $i$
DAN $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$

→ GEEF MAAR EENS ZO'N $f$.
ER IS GEEN FORMULE DIE ZO'N $f$
DEFINIEERT.

GÖDEL 1940 LEIDT NIET TOT TEGENSPRAAK.

COHEN $196^{0}/_{1}/_{2}$ NEGATIE LEIDT NIET TOT TEGENSPRAAK.

(BIJNA) IEDEREEN GEBRUIKTE DIT AXIOMA

WELORDENINGSSTELLING
ELKE VERZAMELING HEEFT EEN WELORDENING.

$X$ EEN VERZ $\prec$ EEN RELATIE OP $X$
IS EEN WELORDENING ALS
ORDENING: $x \prec y$ OF $y \prec x$ ALS $x \neq y$
$x \prec y \wedge y \prec z \to x \prec z$
$x \not\prec x$

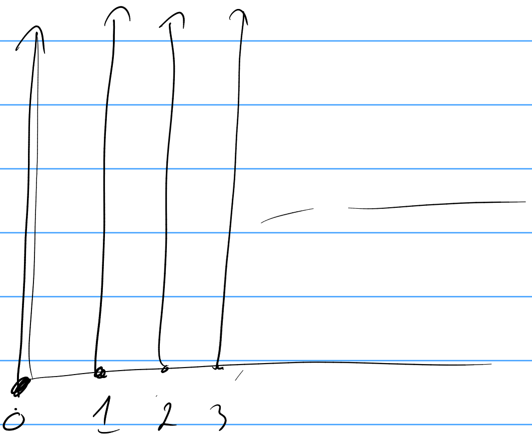
WEL- : ELKE NIET-LEGE DEEL-VERZ VAN $X$ HEEFT EEN MINIMUM.

- GEWONE ORDENING VAN $\mathbb{N}$.
- $k \prec l$ ALS $\begin{cases} k \text{ EVEN, } l \text{ ONEVEN} \\ \text{ANDERS } k < l \end{cases}$

$0 \; 2 \; 4 \; 6 \; 8 \; \cdots \quad 1 \; 3 \; 5 \; 7 \; \cdots$

- op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$(k, l) \prec (m, n)$ : $k < m$ OF $k = m$ EN $l < n$



GEWONE ORDE VAN $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[0,1]$ GEEN WELORDENING.

$[0,1]$ GEEN MINIMUM.

1904: K.A. $\Longrightarrow$ W.S.

MAKKELYK: W.S. $\Longrightarrow$ K.A.

NEEM EEN WELORDENING VAN $\bigcup_{i \in I} X_i$

$f(i) = \min X_i$

WELORDENINGEN MAKEN INDUCTIE EN RECURSIE MOGELYK.

# LEMMA VAN ZORN

GAAT OVER PARTIËLE ORDENINGEN.

EEN PARTIËLE ORDENING OP $X$
IS EEN RELATIE $\leq$ MET

- $x \leq x$
- $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
- $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$

VOORBEELDEN

- FAMILIE VERZ'N $\mathcal{A}$, $\subseteq$ IS EEN PART. ORD.
- DELINGSRELATIE OP $\mathbb{N}$
  $m \mid n$ BETEKENT $m$ DEELT $n$
- $C([0,1])$ $f \leq g$ BETEKENT $f(x) \leq g(x)$ VOOR ALLE $x$

LEMMA VAN ZORN:
ALS $(X, \leq)$ PARTIEEL GEORDEND IS
EN ER GELDT:

(*) EKE KETEN (LINEAIR GEORDENDE DEELVERZ) HEEFT EEN BOVENGRENS

DAN HEEFT $X$ MAXIMALE ELEMENTEN.

$x$ IS MAXIMAAL
ALS ER NIETS BOVEN $x$ LIGT;
ALS $x \leq y$ DAN $x = y$.

(*) "$(X, \leq)$ IS INDUCTIEF"

- DE VERZ. VAN ALLE FILTERS OP EEN VERZAMELING.

- $X$ EEN VECTORRUIMTE

  $L = \{ A \subseteq X : A$ IS LINEAIR ONAFH. $\}$

  $A$ IS LIN ONAFH $\Leftrightarrow$ ELKE EINDIGE DEELVERZ IS LIN. ON.

- $R$ EEN COMMUTATIEVE RING MET $1$

  DAN IS $J = \{ I \subseteq R : I$ IS EEN IDEAAL, $I \neq R \}$

LEMMA VAN ZORN IMPLICEERT:

- ULTRAFILTER STELLING
- ELKE VECTORR. HEEFT EEN BASIS

  ELKE VECTOR IS EINDIGE LIN. COMB. VAN ELEMENTEN VAN ZO'N MAXIMALE LIN. ONAFH. VERZ.
- ELKE COMM. RING MET $1$ HEEFT MAXIMALE IDEALEN.

K.A. $\Leftrightarrow$ W.S $\Leftrightarrow$ LvZ

K.A. $\Rightarrow$ CONTINU $\Leftrightarrow$ RIJTJESCONTINU

$\Rightarrow$ ZONDER K.A.

$\Leftarrow$ STEL ER IS EEN $\varepsilon > 0$ ZODAT $\forall \delta > 0\ \exists x$ MET $|x - p| < \delta \wedge |f(x) - f(p)| \geq \varepsilon$

ALLE $A_n \neq \emptyset$

ONEINDIG VEEL INDIVIDUELE KEUZEN

BIJ $\delta = 1/n$ KIEZEN WE $x_n$

DE RIJ $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ GEEFT TEGENSPRAAK

EEN KEUZE VAN EEN RIJ

$A_n = \{ x : |x - p| < 1/n \wedge |f(x) - f(p)| \geq \varepsilon \} \neq \emptyset$

DE RIJ $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ IS EEN ELEMENT VAN $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$

K.A. ER IS EEN NIET-LEBESGUE-MEETBARE VERZAMELING.

KEUZEFUNCTIE VOOR DE NEVENKLASSEN VAN $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$

DIE BEPAALT $A \subseteq \mathbb{R}$

MET $|A \cap (x+\mathbb{Q})| = 1$

ZO'N $A$ IS NIET MEETBAAR

NEEM $A \subseteq [0,1]$

WE GAAN DE PRODUCTTOPOLOGIE DEFINIËREN OP $\prod_{i\in I} X_i$

(AANGENOMEN DAT ELKE $X_i$ EEN TOPOLOGIE $\mathcal{T}_i$ HEEFT)

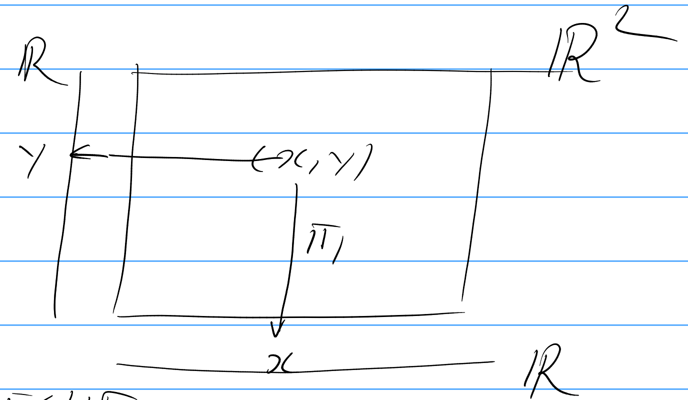
DE STELLING VAN TYCHONOFF:

$\prod_{i\in I} X_i$ IS COMPACT $\Longleftrightarrow$ ELKE $X_i$ IS COMPACT

$\Longrightarrow$ METEEN DUIDELYK

WANT WE EISEN DAT PROJECTIES CONTINU ZYN.

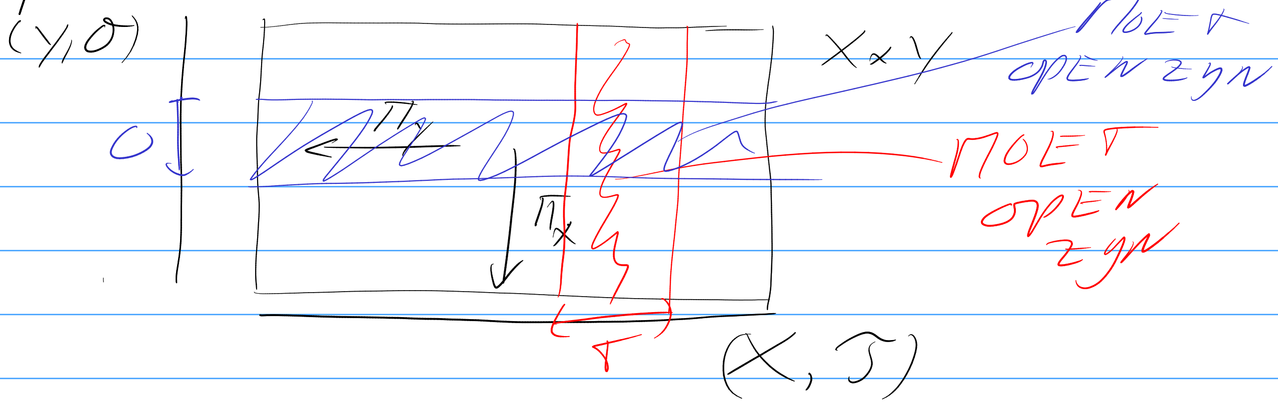
$$\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$$
$$(x_i)_i \longmapsto x_j$$




$\Longleftarrow$ IS ECHT DE STELLING VAN TYCHONOFF

SvT $\Longleftrightarrow$ K.A.

PRODUCTTOPOLOGIE VOOR EEN PRODUCT VAN TWEE RUIMTEN




EIS: PROJECTIES CONTINU.

DAN MOETEN DE VOLGENDE VERZ'N OPEN ZIJN

$\pi_X^{-1}[T] = T \times Y$ ALS $T \in \mathcal{T}$

$\pi_Y^{-1}[O] = X \times O$ ALS $O \in \mathcal{O}$

DUS OOK $T \times O$ ALS $T \in \mathcal{T}, O \in \mathcal{O}$

$\mathcal{S} = \{T \times Y : T \in \mathcal{T}\} \cup \{X \times O : O \in \mathcal{O}\}$ GEBRUIKEN WE ALS SUBBASIS VOOR EEN TOPOLOGIE

$\mathcal{B} = \{T \times O : T \in \mathcal{T}, O \in \mathcal{O}\}$ IS EEN BASIS VOOR DIE TOPOLOGIE

$\mathcal{B}$ ONTSTAAT UIT $\mathcal{S}$ DOOR EINDIGE DOORSNEDEN TE NEMEN.

ALS Z EEN RUIMTE IS EN $f : Z \longrightarrow X \times Y$ EEN AFB DAN $f$ IS CONTINU $\Longleftrightarrow$ $\pi_X \circ f$ EN $\pi_Y \circ f$ ZIJN CONTINU.

VOLGENDE KEER

$X, Y$ COMPACT $\rightarrow X \times Y$ COMPACT
[ZONDER K.A.]

PROD. TOP VOOR $\prod_{i \in I} X_i$

+ ST VAN TYCHONOFF.