AM3590 2020-12-01

$\mathcal{T}$ $\mathcal{O}$

Producttop op $X \times Y$

Subbasis: $\{T \times Y : T \in \mathcal{T}\} \cup \{X \times O : O \in \mathcal{O}\}$

Basis: $\{T \times O : T \in \mathcal{T}, O \in \mathcal{O}\}$

$\pi_X : X \times Y \to X$ $\quad \pi_Y : X \times Y \to Y$
zijn continu

(1) $f : Z \to X \times Y$ is continu
desda $\pi_X \circ f$ en $\pi_Y \circ f$
zijn continu

$\Rightarrow$ samenstelling.

$\Leftarrow$ TB voor $S \in \mathcal{S}$: $f^{-1}[S]$ open in Z.
dwz $f^{-1}[T \times Y]$, $f^{-1}[X \times O]$ open in Z

$f(z) \in T \times Y$
betekent $\pi_X(f(z)) \in T$

$f^{-1}[T \times Y] = (\pi_X \circ f)^{-1}[T]$ is open bij veronderst.

$f^{-1}[X \times O] = (\pi_Y \circ f)^{-1}[O]$ — " —

De producttop is de enige
met deze eigenschap.

Stel $\mathcal{R}$ is een top op $X \times Y$
die aan de stelling voldoet.

- $\mathrm{ID} : \underset{\text{prod.}}{X \times Y} \to \underset{\mathcal{R}}{X \times Y}$ is continu

want $\pi_X \circ \mathrm{ID}$ en $\pi_Y \circ \mathrm{ID}$ zijn cont.

en die de projecties continu maakt.

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \text{ (PROD)} \arrow[r, "ID"] \arrow[dr, "\pi_X"'] \arrow[drr, bend left, "\pi_Y"] & X \times Y \text{ } (\mathcal{R}) \arrow[d] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
& X & Y
\end{tikzcd}$$

$\pi_X \circ ID = \pi_X$ EN $\pi_Y \circ ID = \pi_Y$

ZIJN CONTINU DUS ID IS CONTINU

DUS $\mathcal{R}$ IS EEN DEEL VAN PROD. TOP:

$\mathcal{R} \ni R = ID^{-1}[R]$ ZIT IN PROD. TOP

CONTINUITEIT VAN PROJECTIES:

PROD. TOP $\subseteq \mathcal{R}$

(2) $\mathcal{F}$ EEN FILTER OP $X \times Y$

$\mathcal{F}$ CONVERGEERT NAAR (x,y)

DESDA $\pi_X(\mathcal{F}) \to x$ EN $\pi_X(\mathcal{F}) \to y$

$\pi_X(\mathcal{F}) = \{ A \subseteq X : \pi^{-1}[A] \in \mathcal{F} \}$

$= \{ A \subseteq X : (\exists F \in \mathcal{F})(\pi_X[F] \subseteq A) \}$

$\Longrightarrow$ DUIDELIJK π_X EN π_Y ZIJN CONTINU

$\Longleftarrow$ ZIJ U OPEN MET $(x,y) \in U$

? $U \in \mathcal{F}$?

NEEM $T \in \mathcal{T}$, $O \in \mathcal{O}$

MET $(x,y) \in T \times O \subseteq U$

DAN $T \in \pi_X(\mathcal{F})$: $\pi_X(\mathcal{F}) \to x$

DUS $T \times Y \in \mathcal{F}$

IDEM $X \times O \in \mathcal{F}$ $\Big\}$ $T \times O \in \mathcal{F}$

3. $X \times Y$ IS COMPACT $\Leftrightarrow$ X EN Y ZIJN COMPACT

$\longrightarrow$ π_x EN π_y CONTINU KLAAR

$\longleftarrow$ ZIJ $\mathcal{U}$ WILLEKEURIGE OPEN OVERD. VAN $X \times Y$.

STAP 1: TERUG NAAR DE BASIS

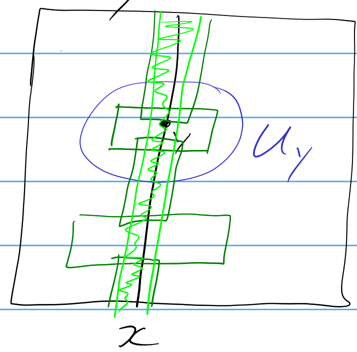
NEEM $x \in X$ VAST

- VOOR ELKE $y \in Y$ NEMEN WE $U_y \in \mathcal{U}$ MET $(x,y) \in U_y$

  DAN $T_y \in \mathcal{T}$, $O_y \in \mathcal{O}$

  MET

  $(x,y) \in T_y \times O_y \subseteq U_y$



- $Y = \bigcup_{y \in Y} O_y$

  OPEN OVERD. VAN Y

  Y IS COMPACT

  NEEM $E_x \subseteq Y$ EINDIG

  MET $Y = \bigcup_{y \in E_x} O_y$

- DAN

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{y \in E_x} T_y \times O_y \subseteq \bigcup_{y \in E_x} U_y$$

NEEM $T_x = \bigcap_{y \in Y} T_y$

BEKIJK $T_x \times Y$

DIE ZIT OOK IN $\bigcup_{y \in E_x} T_y \times O_y$

$(u,v) \in T_x \times Y$

$v \in O_y$ VOOR EEN y

$u \in T_y$ VOOR ALLE y

$v \in O_{y_0} \rightarrow (u,v) \in T_{y_0} \times O_{y_0}$ ✓

WE HEBBEN VOOR DEZE x:
EEN OPEN VERZ $T_x \ni x$
EN $\{U_y : y \in E_x\} \subseteq \mathcal{U}$ EINDIG
MET

$$T_x \times Y \subseteq \bigcup_{y \in E_x} U_y$$

STAP 2: X IS COMPACT
NEEM $F \subseteq X$ EINDIG
MET $X = \bigcup_{x \in F} T_x$

DUS $X \times Y = \bigcup_{x \in F} T_x \times Y$

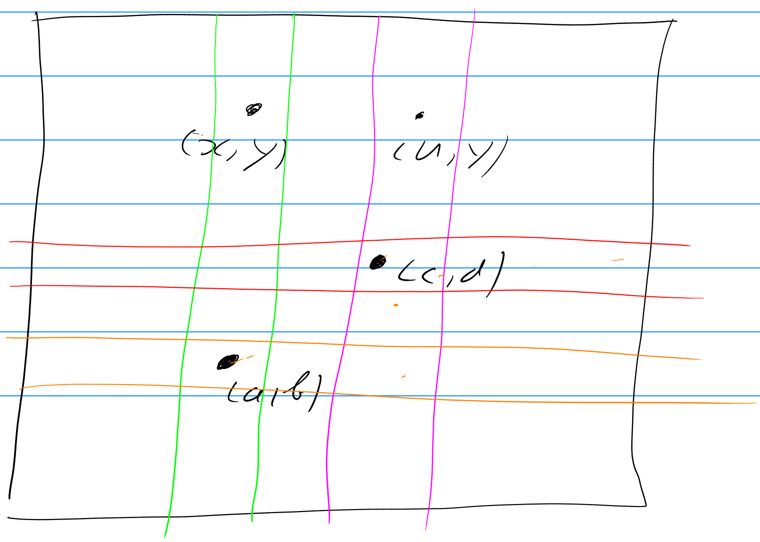
$$\subseteq \bigcup_{x \in F} \bigcup_{y \in E_x} U_y$$

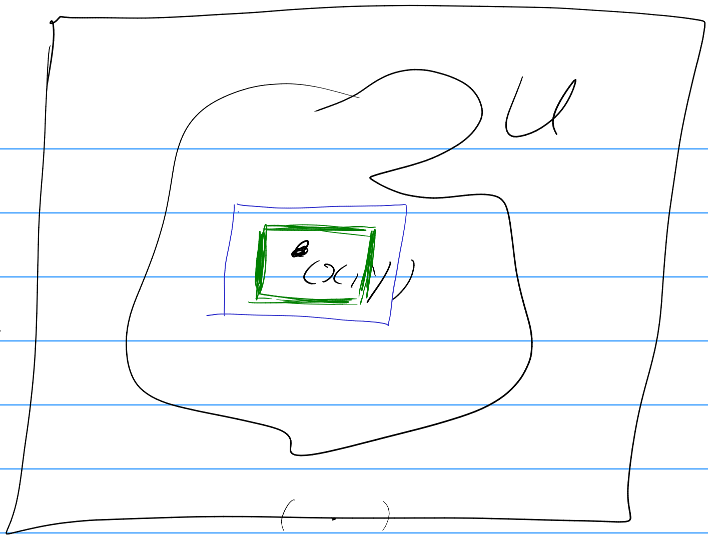
HIER STAAT DE EINDIGE DEELOVERDEKKING.

$X \times Y$ IS T_0 DESDA X EN Y ZIJN T_0
T_1 T_1
T_2 T_2
T_3 T_3

$S \times S$ IS <u>NIET</u> NORMAAL

T_0
T_1
T_2





T_3

$(x,y) \in U$

$(x,y) \in T \times O \subseteq U$

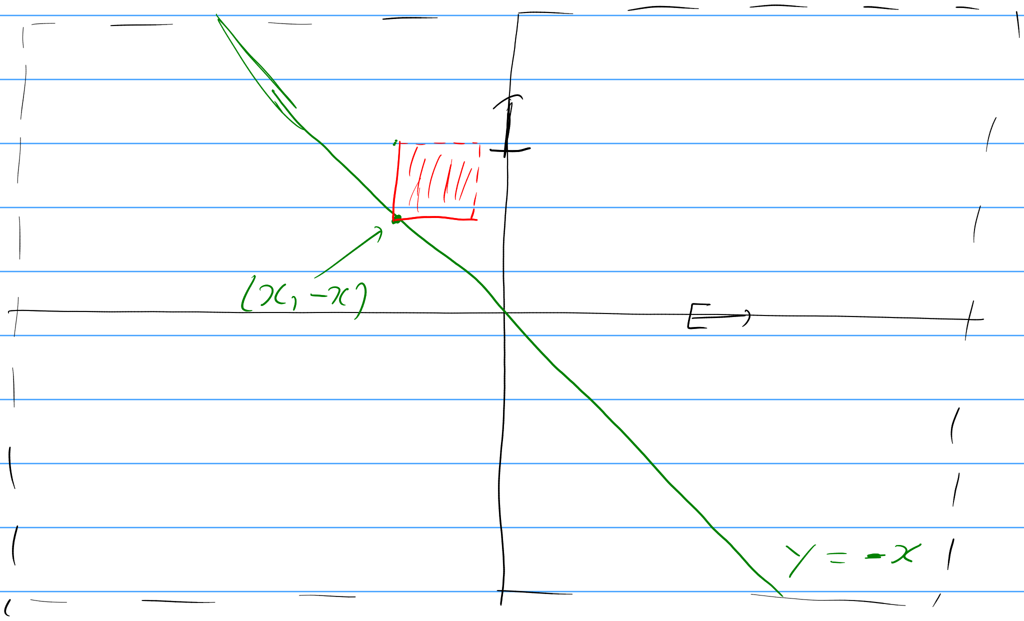
$x \in S \subseteq \overline{S} \subseteq T$

$y \in P \subseteq \overline{P} \subseteq O$

OPGAVE: BEWIJS: $\overline{S \times P} = \overline{S} \times \overline{P}$

OPGAVE: BEWIJS $\Longrightarrow$ (T_0, T_1, T_2, T_3)

$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$



$N_D = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$

- GESLOTEN
- DISCREET: $[x, x+1) \times [-x, -x+1) \cap N_D = \{(x,-x)\}$
- ELKE DEELVERZ VAN N_D IS GESLOTEN IN $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$
- NEEM $P = \{(x,-x) : x \text{ IRRATIONAAL}\}$

  $Q = \{(x,-x) : x \text{ RATIONAAL}\}$

P en Q zijn gesloten, $P \cap Q = \emptyset$
Als in het Niemytzki-vlak:
P en Q hebben geen
disjuncte omgevingen.

$S \times S$ is regulier en
niet normaal.

Opmerking:
π_X en π_Y zijn open afbeeldingen
dus $U \subseteq X \times Y$ open $\Longrightarrow$
$\pi_X[U]$ en $\pi_Y[U]$ open
in X resp Y

Want het geldt voor elementen
van de basis:

$$\pi_X[T \times O] = T$$
$$\pi_Y[T \times O] = O$$

$$U = \bigcup \mathcal{B}' \Longrightarrow \pi_X[U] = \bigcup \{\pi_X[B] : B \in \mathcal{B}'\}$$

open

$$\pi_X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow x$$
is niet gesloten

$$F = \{(x,y) : xy = 1\}$$
$$\pi_X[F] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$ niet gesloten

Tel $\mathbb{Q}$ af: $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$G = \{(q_n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$ — is gesloten

$$\pi_X[G] = \mathbb{Q}$$ — niet gesloten

STELLING:

X is compact desda voor elke ruimte Y is $\pi_Y : X \times Y \to Y$ gesloten.

$\Longrightarrow$ hebben we gezien stap 1 van het productbewijs

$\pi_Y[F]$ is gesloten

neem $y \notin \pi_Y[F]$

zoek $O \ni y$

met $O \cap \pi_Y[F] = \emptyset$

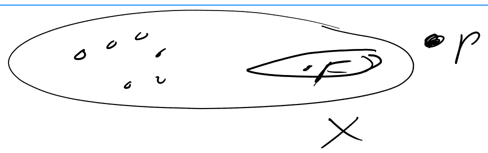
$(X \times O) \cap F = \emptyset$

Voor $x \in X$ neem T_x en O_x zó dat $(x, y) \in T_x \times O_x$, $T_x \times O_x \cap F = \emptyset$

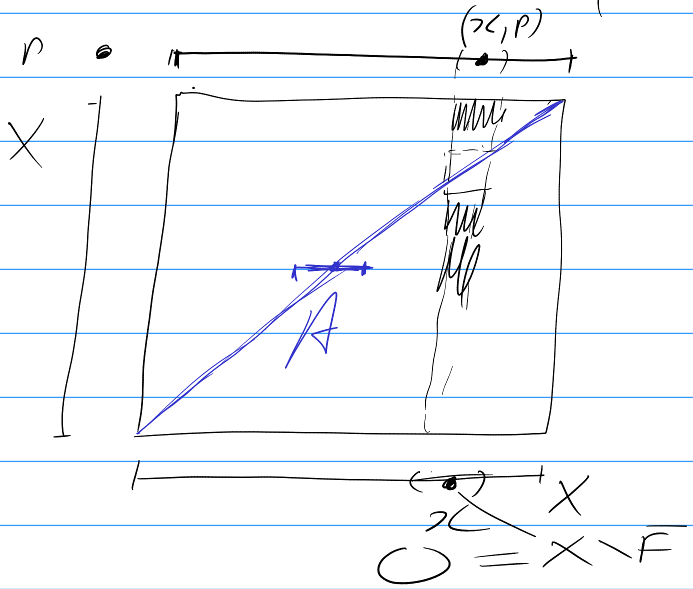
$\Longleftarrow$ Stel X is niet compact en maak een Y zó dat $\pi_Y : X \times Y \to Y$ niet gesl. is.
Neem een filter $\mathfrak{F}$ <u>zonder</u> fijner filter dat convergeert.
Dan $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\} = \emptyset$

Y: verzameling: $X \cup \{p\}$ $(p \notin X)$ $(p = \mathfrak{F})$

- $\{x\}$ open als $x \in X$
- lokale basis in p: $\{F \cup \{p\} : F \in \mathfrak{F}\}$



IN Y GELDT: $\overline{F} = F \cup \{p\}$ $(F \in \mathcal{F})$



IN $X \times Y$
NEMEN WE
$A = \overline{\{(x,x) : x \in X\}}$

$p \notin \pi_Y[A]$
NEEM $x \in X$
NEEM $F \in \mathcal{F}$
MET $x \notin \overline{F}$
BEKIJK
$U = O \times (F \cup \{p\})$ OMG. VAN (x,p)
MAAR $O \cap \overline{F} = \emptyset$ DUS $U \cap A = \emptyset$

- $\pi_Y[A] = X$
EN $p \in \overline{X}$

MAAR $p \in \overline{\pi_Y[A]} \setminus \pi_Y[A]$

NIET GESLOTEN.

WILLEKEURIGE PRODUCTEN
+ ST VAN TYCHONOFF

LAATSTE WEEK: ARZELA-ASCOLI

COMPACTHEID
IN $C([0,1])$
BIJ VOORBEELD.