AM3590 2020-12-08 ①

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{i}, \frac{1}{2}+\frac{1}{i}\right)$$

$$= \{ x : \forall_i \ |x_i - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{i} \}$$

$A \ \{ x : \exists i \ x_i > \frac{1}{2} \}$

$B \ \{ x : \forall i \ x_i \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{i+2} \}$

$A \subseteq U = \{ x : \exists i \ x_i > \frac{1}{2} - \frac{1}{i+3} \}$

$B \subseteq V = \{ x : \forall i \ x_i < \frac{1}{2} - \frac{1}{i+2\frac{1}{2}} \}$

AM3590 2020-12-08

STELLING(EN) VAN ARZELÁ EN ASCOLI

KARAKTERISEREN COMPACTHEID IN $C(X, \mathbb{R})$ ← CONTINUE FUNCTIES

↑ TOP RUIMTE

BEGRENSD

X : COMPACT OF LOKAAL COMPACT.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

OPEN DEELVERZ'N

$K \subseteq C(X, \mathbb{R})$ $\quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

COMPACT

- BIJ VASTE x IS $f \longmapsto f(x)$ CONTINU

  DUS

  $$K[x] = \{ f(x) : f \in K \}$$

  IS COMPACT.

- K IS OOK EEN DEELVERZ VAN $\mathbb{R}^X$ EN HEEFT DUS OOK DE PRODUCTTOPOLOGIE $\mathcal{T}_p$

- $\mathrm{ID} : (K, \|\cdot\|) \longrightarrow (K, \mathcal{T}_p)$

  DIE IS CONTINU

  CONV. TOV $\mathcal{T}_p$ IS PUNTSGEWIJZE CONV.

  SUBB. OMG VAN f : $\{ g : |g(x) - f(x)| < \varepsilon \}$

  VOOR EEN x EN EEN $\varepsilon > 0$

$ID[B(f,\varepsilon)] \subseteq \{g : |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$

- $(K, \|.\|)$ COMPACT
  $(K, \mathcal{T}_p)$ HAUSDORFF
  <u>DUS</u> ID IS EEN GESLOTEN AFB.

ALS $F \subseteq K$ GESLOTEN TOV $\|.\|$

DAN F COMPACT TOV $\|.\|$

DUS F COMPACT TOV $\mathcal{T}_p$

DUS F GESLOTEN TOV $\mathcal{T}_p$

- <u>DUS</u> COMPACTHEID VAN K
  IMPLICEERT:
  - $K[x]$ COMPACT, ALLE x !
  - DE TOPOLOGIE VAN $\|.\|$ IS GELIJK AAN DE $\mathcal{T}_p$ <u>OP K</u> !!
  - K IS DUS COMPACT EN <u>GESLOTEN</u> TOV $\mathcal{T}_p$

<u>$X = [0,1]$</u> $f_n(x) = x^n$

$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ IS NIET COMPACT

$f_n \longrightarrow$ PUNTSGEWIJS

$f_t(x) = x + t$

$\{f_t : t \in [0,1]\}$ IS COMPACT IN $C([0,1], \mathbb{R})$

Voor $F \subseteq \mathbb{R}^X$ geldt:

F is compact $\Longleftrightarrow$ • voor elke x is $F[x] = \{f(x) : f \in F\}$ begrensd

• F is gesloten in $\mathbb{R}^X$.

$\longrightarrow$ Niet gezien $F[x]$ is zelfs compact

$\longleftarrow$ voor $x \in X$ stel

$$M_x = \sup\{|f(x)| : f \in F\}$$

dan $F \subseteq \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$

$\prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$ is compact [Tychonoff]

F is gesloten in $\mathbb{R}^X$

dus in $\prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$

dus compact.

Hoe kunnen we aan K zien dat K gesloten is tov $\mathcal{T}_p$

$$ev : C(X, \mathbb{R}) \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, x) \longmapsto f(x)$$

ev is continu

Neem (f, x) en $\varepsilon > 0$

• neem O open met $x \in O$

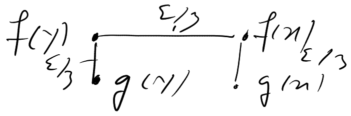
en $y \in O \longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$

• dan is $B(f, \varepsilon/3) \times O$ een omgeving van (f, x).

Als $(g, y) \in B(f, \varepsilon/3) \times O$

dan $|g(y) - f(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)|$

$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$



- ER GELDT MEER

$$|g(y)-g(x)| < |g(y)-f(y)| + |f(y)-f(x)| + |f(x)-g(x)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$
$$= \varepsilon$$

! DIE ENE OMGEVING O VAN x WERKT VOOR ALLE $g \in B(f, \varepsilon/3)$ BIJ DEZE $\varepsilon > 0$

STEL K IS COMPACT T.O.V. $\|\cdot\|$

ZIJ $x \in X$ VAST EN ZIJ $\varepsilon > 0$.

BIJ ELKE $f \in K$ IS ER EEN OPEN O_f OM x (AFH. VAN f) ZODAT:

ALS $\|g-f\| < \varepsilon/3$
DAN GELDT VOOR $y \in O_f$
DAT $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$

K IS COMPACT, NEEM $F \subseteq K$ EINDIG MET

$$K \subseteq \bigcup_{f \in F} B(f, \varepsilon/3)$$

NEEM $O = \bigcap_{f \in F} O_f$: OPEN EN $x \in O$

VOOR ELKE $g \in K$ GELDT
ALS $y \in O$ DAN $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$

"ÉÉN OMGEVING VOOR ALLE f"

WE NOEMEN DIT EQUICONTINUÏTEIT / GELIJKMATIGE CONTINUÏTEIT

CONCLUSIE:

ALS K COMPACT IS TOV $\|\cdot\|$

DAN IS K EQUICONTINU

EN PUNTSGEWIJS BEGRENSD

[$K(x)$ BEGRENSD VOOR ALLE x.]

IN ONS GEVAL ZELFS BEGRENSD

K COMPACT: $\sup_{f\in K} \|f\| < \infty$

ALS X COMPACT IS GELDT HET OMGEKEERDE OOK. (BIJNA)

STEL K IS BEGRENSD EN EQUICONTINU

- DE AFSL. VAN K TOV DE NORM IS OOK EQUICONTINU

ZIJ $x \in X$ EN $\varepsilon > 0$

NEEM $O \ni x$ OPEN ZÓ DAT VOOR $f \in K$ EN $y \in O$:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$$

ALS $g \in \overline{K}$ DAN IS ER EEN $f \in K$ MET $\|g - f\| < \varepsilon/3$

DAN, ALS BOVEN,

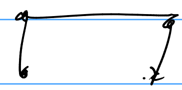
$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon \quad (y \in O)$$

- NEEM AAN K IS GESLOTEN TOV $\|\cdot\|$

KIJK NU NAAR DE AFSLUITING VAN K TOV $\mathcal{T}_p$: $\overline{K}$

: $\overline{K}$ BESTAAT UIT CONTINUE FUNCTIES EN IS EQUICONTINU

- NEEM $x \in X$ EN $\varepsilon > 0$
  NEEM O OPEN MET
  $x \in O$ EN
  $y \in O \to |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$
  VOOR ALLE $f \in K$.
- NEEM $g \in \overline{K}$
  NEEM $y \in O$
  NEEM $f \in K$ ZÓ DAT
  $|f(y) - g(y)| < \varepsilon/3$ EN
  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/3$



  DAN VOLGT (WEGENS $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$)
  $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$

K — $\overline{K}$ TOV 11.11 -- K GESLOTEN TOV 11.11
NU ZITTEN WE IN $\overline{K}$ TOV $\mathcal{T}_p$
NU:
11.11 EN $\mathcal{T}_p$ GEVEN DEZELFDE TOPOLOGIE OP $\overline{K}$

DAN KLAAR:
- $\overline{K} \subseteq \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$
- $\overline{K}$ IS COMPACT TOV $\mathcal{T}_p$
- $\overline{K}$ IS DUS COMPACT TOV 11.11
- K IS GESLOTEN TOV 11.11
  DUS GESLOTEN IN $\overline{K}$ DUS COMPACT TOV 11.11
- ACHTERAF GELDT DUS $K = \overline{K}$ TOV $\mathcal{T}_p$

— ID: $(\overline{K}, 11.11) \longrightarrow (\overline{K}, \mathcal{T}_p)$ IS CONTINU
DUS $\mathcal{T}_p \subseteq$ TOP. VAN 11.11

Zij $f \in \overline{K}$ en zij $\varepsilon > 0$

We zoeken een $\mathcal{T}_p$-omgeving van f, zeg U, zó dat

$$f \in U \cap \overline{K} \subseteq B(f, \varepsilon).$$

Voor elke x is er een open $O_x \ni x$ zó dat voor alle $g \in \overline{K}$ en alle $y \in O_x$ geldt

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon/3$$

X is compact, neem $E \subseteq X$ eindig met $X = \bigcup_{x \in E} O_x$

Neem nu:

$$U = \{ h \in \mathbb{R}^X : (\forall x \in E)(|h(x) - f(x)| < \varepsilon/3) \}$$

$$= \bigcap_{x \in E} \underbrace{\pi_x^{-1}\left[(f(x) - \varepsilon/3, f(x) + \varepsilon/3) \right]}_{\text{open strook}}$$

Neem $g \in U \cap \overline{K}$ TB $\|g - f\| < \varepsilon$

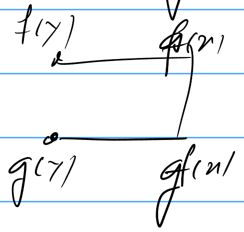
Neem $y \in X$

Neem $x \in E$ met $y \in O_x$

$$|g(y) - f(y)| \leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

$$= \varepsilon.$$



STEL X IS COMPACT.

DAN GELDT VOOR $K \subseteq C(X, \mathbb{R})$

$\overline{K}$ IS COMPACT DESDA

K IS PUNTSGEWIJS BEGR.
EN EQUICONTINU.

PUNTSGEWIJS BEGR: TYCHONOFF

EQUICONT : $\|.\|$-TOP EN
$\mathcal{T}_p$ GELIJK

VOLGENDE KEER:
LOKAAL COMPACTE X

STELLING VAN MONTEL

IN $H(G)$ "ANALYTISCHE FUNCTIES OP G"
GELDT:
$\overline{K}$ IS COMPACT
DESDA
K IS LOKAAL BEGRENSD

$\forall z \; \exists O_z \ni z \; \exists M$

$\forall f \in K \quad \sup_{w \in O_z} |f(w)| \leq M$