AM 3590 2020-12-10

ARZELÀ-ASCOLI UITBREIDEN

$C(X,Y)$ WELKE TOPOLOGIE?

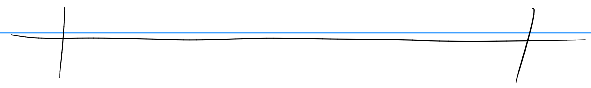
$\hookrightarrow$ $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, (METRISCH)

X NIET COMPACT: ONBEGRENSDE FUNCTIES

GEEN SUP-NORM

$X = \mathbb{R}$: $f_t(x) = e^{tx}$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

$f_{1/n} \longrightarrow f_0$ UNIF OP ELK GESL. INT.



X LOKAAL COMPACT: T_2

PLUS

ELKE x HEEFT EEN OMGEVING U ZÓ DAT $\overline{U}$ COMPACT IS.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, OPEN DEELVERZ'N

$\overline{(\qquad)} = [\qquad]$ IS COMPACT

IS COMPACT.

TOPOLOGIE: COMPACT-OPEN TOPOLOGIE $\mathcal{T}_{co}$

$C(X,Y)$: $\mathcal{T}_{co}$ HEEFT ALS SUBBASIS

$$\left\{ M(C,U) : \begin{matrix} C \subseteq X \text{ COMPACT} \\ U \subseteq Y \text{ OPEN} \end{matrix} \right\}$$

$$M(C,U) = \left\{ f \in C(X,Y) : f[C] \subseteq U \right\}$$

$\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_{co}$

$\llcorner\ C(X,Y) \subseteq Y^X$

$$\pi_x^{-1}[U] \cap C(X,Y) = M(\{x\}, U)$$

ALTERNATIEVE BESCHRIJVING
($Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, EVT METRISCHE RUIMTE d)

- $f \in C(X,Y)$, $C \subseteq X$ compact, $\varepsilon > 0$

$$B(f; C, \varepsilon) = \left\{ g \in C(X,Y) : \boxed{\max_{x \in C} d(f(x), g(x))} < \varepsilon \right\}$$

$$\mathcal{B}_f = \left\{ B(f; C, \varepsilon) : \begin{matrix} C \text{ COMPACT} \\ \varepsilon > 0 \end{matrix} \right\}$$

GOEDE TOEKENNING VAN LOKALE BASES

DIT BEPAALT EEN TOPOLOGIE

"TOPOLOGIE VAN UNIFORME CONVERGENTIE OP COMPACTE VERZ'N"

$$f_n \longrightarrow f \iff \forall C\ \forall \varepsilon\ \exists N\ \underset{n \geq N}{f_n \in B(f; C, \varepsilon)}$$

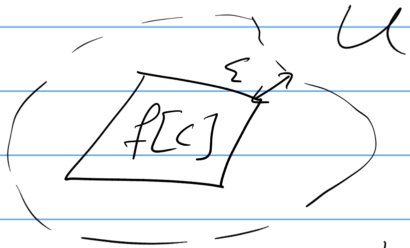
DEZE TWEE TOPOLOGIEËN ZIJN GELIJK

$Y = \mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y|$

$$\rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

- ELKE $M(C,U)$ IS OPEN TOV "$B(f;C,\varepsilon)$"

$f \in M(C,U)$



$B(f;C,\varepsilon) \subseteq M(C,U)$

$$0 < \varepsilon = \inf\{d(y,z) : y \in f[C], z \in X \setminus U\}$$

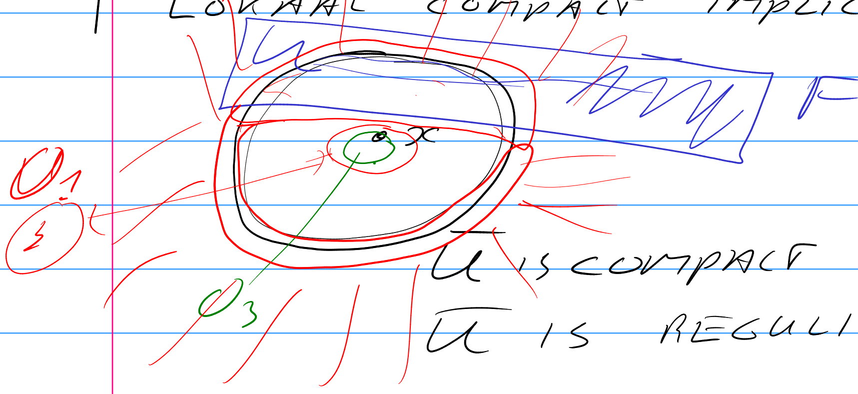
- ELKE $B(f;C,\varepsilon)$ IS OPEN IN $\mathcal{T}_{co}$

→ WE ZOEKEN $C_1, \dots, C_k$ COMPACT
$U_1, \dots, U_k$ OPEN

MET
$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} M(C_i, U_i) \subseteq B(f;C,\varepsilon)$$

VOOR $x \in C$ NEEM O_x OPEN MET $x \in O_x$
EN $z \in \overline{O_x} \Rightarrow d(f(z), f(x)) < \varepsilon/3$

LOKAAL COMPACT IMPLICEERT REGULIER



$O_1 \ni x$

$O_2 \ni F \cap \overline{U} \cup$ RAND U

$\overline{U}$ IS COMPACT

$\overline{U}$ IS REGULIER

$x \to U_1 = O_1 \cap U$

$U_2 = O_2 \cup X \setminus \overline{U}$

F

C IS COMPACT. $E \subseteq C$ EINDIG

MET $C \subseteq \bigcup_{x \in E} O_x$

$C_x = \overline{O_x \cap C} \subseteq \overline{O_x} \cap C$ COMPACT

$U_x = \{ y : d(y, f(x)) < \varepsilon/3 \}$

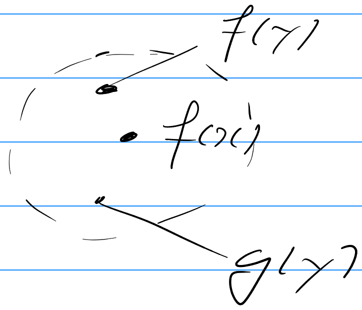
DUS $f[C_x] \subseteq U_x$: $f \in M(C_x, U_x)$

$\bigcap_{x \in E} M(C_x, U_x) \subseteq B(f; C, \varepsilon)$

g NEEM $y \in C$ EN $x \in E$: $y \in O_x$

DAN $g(y) \in U_x$

DUS $d(g(y), f(y)) < 2/3\, \varepsilon$



ARZELÀ – ASCOLI

ZIJ X LOKAAL COMPACT EN $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}, -$METRISCH

K IS COMPACT TOV $\mathcal{J}_{cc}$ DESDA

$Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$: $K[x]$ BEGRENSD

- $\overline{K[x]}$ IS COMPACT VOOR ALLE x
- K IS EQUICONTINU

$\longrightarrow$ DIT WETEN WE AL. [WERKT ALTIJD]

$\Leftarrow$ ALS IN HET COMPACTE GEVAL

- $K \subseteq \prod_{x \in X} K[x] \subseteq \prod_{x \in X} \overline{K[x]}$
- $\prod_{x \in X} \overline{K[x]}$ IS COMPACT
- $\overline{K}$ (AFSLUITING IN $\mathcal{T}_p$)
  IS EQUICONTINU (VORIGE KEER)
- DUS $\overline{K} \subseteq C(X,Y)$
  $\overline{K}$ COMPACT T.O.V. $\mathcal{T}_p$
- $\mathcal{T}_p$ EN $\mathcal{T}_{co}$ ZIJN GELIJK OP $\overline{K}$
  ✓ $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}_{co}$

NU NOG: $\mathcal{T}_{co} \subseteq \mathcal{T}_p$ OP $\overline{K}$

WE BEKIJKEN EEN $B(f; C, \varepsilon)$

NEEM VOOR $x \in C$ WEER O_x OPEN ZÓ DAT VOOR ELKE $g \in \overline{K}$ EN $y \in O_x$ GELDT

$$d(g(y), g(x)) < \varepsilon/3$$

NEEM $E \subseteq C$ EINDIG MET

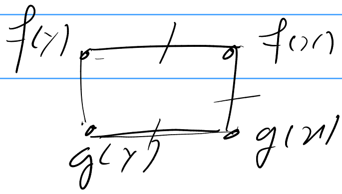
$$C \subseteq \bigcup_{x \in E} O_x$$

NU: $O = \bigcap_{x \in E} \pi_x^{-1}\left[\underline{B(f(x), \varepsilon/3)}\right]$

OMG VAN f IN $\mathcal{T}_p$

NU $O \subseteq B(f; C, \varepsilon)$ NEEM $g \in O$

ALS $y \in C$ DAN $y \in O_x$ VOOR EEN $x \in E$



$$|g(y) - f(y)| < \varepsilon$$

✓

STEL NU: X LOKAAL COMPACT
MET AFT. BASIS.
[X REGULIER DUS METRISEERBAAR]
$\mathcal{B}$ IS DIE AFT. BASIS
DAN IS $\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B} : \overline{B} \text{ compact}\}$
OOK EEN BASIS

NEEM $x \in X$ EN $O \ni x$
EN NEEM DIE U_x MET $\overline{U_x}$ COMPACT
NEEM $B \in \mathcal{B}$ MET
$$x \in B \subseteq O \cap U_x$$
DAN $B \in \mathcal{B}_1$ WANT $\overline{B} \subseteq \overline{U_x}$

$$\mathcal{B}_1 = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $C_1 = B_1$ $\quad \overline{B_1}$ IS COMPACT
- NEEM n_1 MET $\overline{B_1} \subseteq \bigcup_{n \leq n_1} B_n$
  $n_1 \geqslant 2$
- $C_2 = \bigcup_{n \leq n_1} B_n$: $\overline{C_2}$ IS COMPACT
  C_2 IS OPEN
  $\overline{C_1} \subseteq C_2$
- NEEM $n_2 > n_1$ ZÓ DAT

$$\overline{C_2} \subseteq \underbrace{\bigcup_{n \leq n_2} B_n}_{C_3}$$

$$\overline{C_2} \subseteq C_3, \quad \overline{C_3} \text{ IS COMPACT}$$

ETC: $\underset{\text{COMPACT}}{\overline{C_k}} \subseteq \underset{\text{OPEN}}{C_{k+1}}$

EN $B_k \subseteq C_k$

- $C_1 \subseteq \overline{C_1} \subseteq C_2 \subseteq \ldots$
- $\bigcup_k C_k = X$
- $d_k(f,g) = \max_{x \in C_k} |f(x) - g(x)|$

HIERUIT:

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \min\{1, d_k(f(x), g(x))\}$$

DIT IS EEN METRIEK OP $C(X, \mathbb{R}/\mathbb{C}/Y)$

DEZE METRIEK BEPAALT $\mathcal{T}_{co}$

- GEGEVEN $B(f; C, \varepsilon)$ BEPAAL $\delta > 0$ ZODAT $B_d(f, \delta) \subseteq B(f; C, \varepsilon)$

NEEM EEN k MET

$$C \subseteq C_k$$

NEEM δ ZO KLEIN DAT

$$\delta \cdot 2^k < \varepsilon$$

ALS $d(g, f) < \delta$

DAN $2^{-k} d_k(f, g) < \delta$

DUS $d_k(f,g) < \delta \cdot 2^k < \varepsilon$

DUS OOK $\max_{x \in C} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$

$$g \in B(f; C, \varepsilon)$$

- OMGEKEERD : $B_d(f, \varepsilon)$

NEEM m ZO GROOT DAT
$$\sum_{k>m} 2^{-k} < \varepsilon/2$$
NU
$$\underset{\ni\ g}{B(f; \overline{C_m}, \varepsilon/2)} \subseteq B_d(f, \varepsilon)$$
g VOOR $x \in \overline{C_m}$ GELDT
$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$
VOOR $k \leq m$:
$$d_k(f, g) < \varepsilon/2$$
$$d(f,g) \leq \underline{\sum_{k\leq m} d_k(f,g) \cdot 2^{-k}} + \sum_{k>m} 2^{-k}$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$
$$= \varepsilon$$

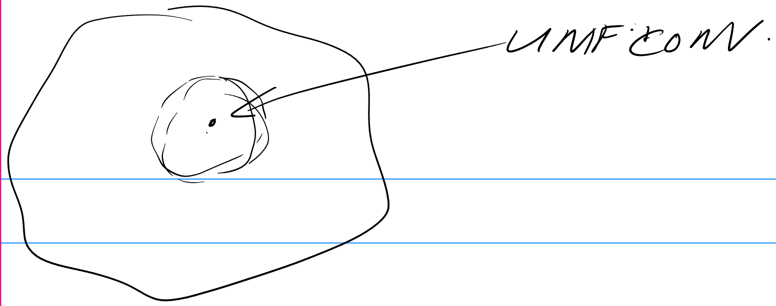
DIT WORDT BIJ COMPLEXE FUNCTIES VEEL GEBRUIKT

$G \subseteq \mathbb{C}$ EEN GEBIED
BEKIJK $C(G, \mathbb{C})$ MET $\mathcal{T}_{co}$
CONVERGENTIE $\equiv$ UNIF. CONV. op COMPACTE VERZ'N

DAT IS GENOEG VOOR:

$H(G)$ IS GESLOTEN IN $C(G, \mathbb{C})$

HOLOMORF/ANALYTISCH



STELLING VAN MONTEL

$K \subseteq H(G)$ HEEFT COMPACTE AFSLUITING

$\iff$ "NORMALE FAMILIE"

K IS LOKAAL BEGRENSD

VOOR ELKE z ZIJN ER $\varepsilon > 0$ EN M_z ZÓDAT

$$\sup\{|f(w)| : |w-z| < \varepsilon,\ f \in K\} \le M_z$$

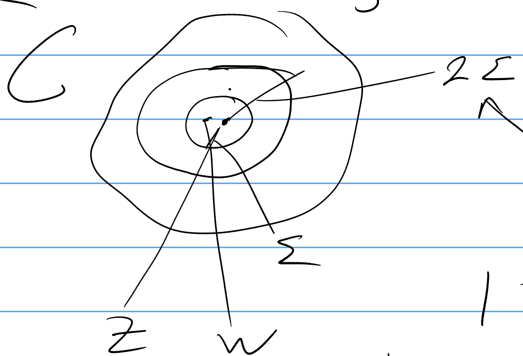
$\Longrightarrow$ $\overline{K[z]}$ COMPACT

K EQUICONTINU

NEEM $\varepsilon > 0$ ZÓDAT

$$|w-z| < \varepsilon \Rightarrow |f(w)-f(z)| < 1 \quad \text{ALLE } f \in K$$

$\Longleftarrow$ K EQUICONTINU?



M_z WERKT OP $\{w : |w-z| \le 2\varepsilon\}$

$$|f(w)-f(z)| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta-z|=2\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-w} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|\zeta-z|=2\varepsilon} \frac{f(\zeta)\cdot(w-z)}{(\zeta-w)(\zeta-z)}\, d\zeta\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi\cdot 2\varepsilon\cdot M_z\cdot |w-z|}{\varepsilon^2}$$

= N. 1W-Z1

TOEPASSING

AFB ST. VAN RIEMANN

$G \neq \mathbb{C}$

G ENKELV. SAMENH

SIMPLY CONN.

DAN IS ER $f : G \to \{z : |z| < 1\}$

ANALYTISCH BIJECTIEF

DVS f^{-1} OOK ANALYTISCH