AM3590 2021-09-03

① WAT BETEKENT "VERSCHILLEND"?

HOMEOMORF - HOMEOMORFISME

(X,d) EN (Y,ρ) METR. RUIMTEN

$f: X \longrightarrow Y$ CONTINU:

VOOR ELKE OPEN $U \subseteq Y$
IS $f^{-1}[U]$ OPEN IN X.

EQUIVALENT:
VOOR ELKE GESLOTEN $F \subseteq Y$
IS $f^{-1}[F]$ GESLOTEN IN X.

f IS EEN HOMEOMORFISME
ALS
- f BIJECTIEF
- f CONTINU
- f^{-1} CONTINU.

DAN ZIJN X EN Y HOMEOMORF $\boxed{X \simeq Y}$

ONS DOEL IS TE BEWIJZEN
ALS $n \neq m$ DAN ZIJN
$\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$
NIET HOMEOMORF.

VIA DIMENSIE

WE ZULLEN TOPOLOGISCHE DIMENSIE DEFINIËREN.

- $X \simeq Y \Rightarrow \dim X = \dim Y$
- $\underline{\dim [0,1]^n = \dim \mathbb{R}^n = n} \qquad n=1,2,\ldots$

$\rightarrow \mathbb{R}^n \not\simeq \mathbb{R}^m$ ALS $n \neq m$

STELLING VAN BROUWER

STEL $U \subseteq \mathbb{R}^n$ IS OPEN

STEL $f: U \to \mathbb{R}^n$ IS CONTINU EN INJECTIEF.

DAN IS $f[U]$ OPEN IN $\mathbb{R}^n$

"INVARIANTIE VAN GEBIED"

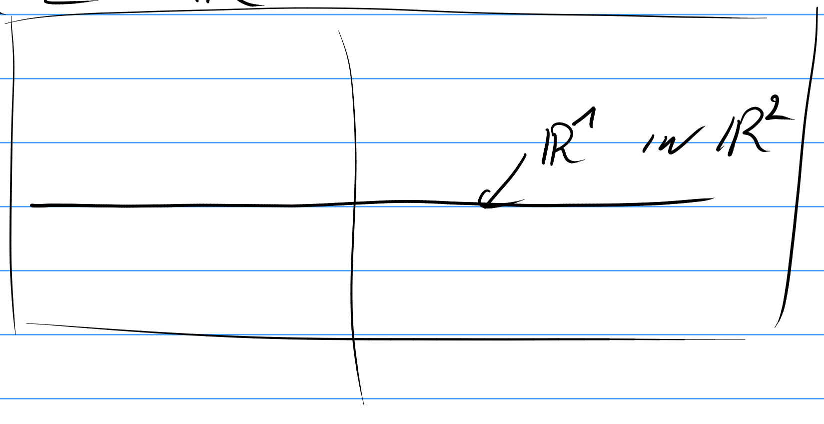
DIT LAAT OOK ZIEN: ALS $m < n$ DAN $\mathbb{R}^m \not\simeq \mathbb{R}^n$

STEL $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ IS EEN HOMEOMORFISME

DAN IS $\mathbb{R}^m$ OPEN IN $\mathbb{R}^n$

MAAR ER IS EEN KOPIE VAN $\mathbb{R}^m$ IN $\mathbb{R}^n$ DIE <u>NIET</u> OPEN IS:

$$\{\underline{x \in \mathbb{R}^n} : \text{ALS } i > m \text{ DAN } x_i = 0\}$$



CONTINUE BIJECTIES ZIJN LANG NIET ALTIJD HOMEOMORFISMEN

(1) $$(\mathbb{R}, \text{DISCR}) \xrightarrow{\text{ID}} (\mathbb{R}, \text{GEWOON}) \qquad (\mathbb{R}, \text{DISCR}) \xleftarrow{\text{ID}} (\mathbb{R}, \text{GEWOON})$$

IS CONTINU, BIJECTIEF

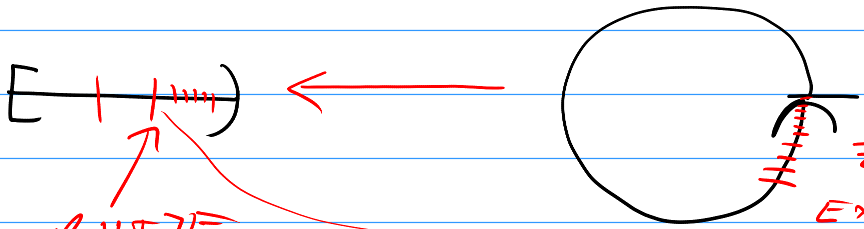
GEEN HOMEOMORFISME

$\{0\}$ IS OPEN $\quad \text{ID}^{-1}[\{0\}]$ NIET

(2) NIET COMPACT $\qquad$ COMPACT

$$[0,1) \longrightarrow \{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \exp(2\pi i t)$$



$z_n = \exp(2\pi i(1 - \frac{1}{n}))$

RIJTJE CONV. NIET ZEKER NIET NAAR 0

$z_n \to 1$

(3) $$\mathbb{P} \simeq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

$$\mathbb{P} \times \mathbb{P} \simeq \mathbb{P}$$

(4) $$C \times C \simeq C$$ CANTORVERZ.

PEANO'S AFBEELDING DOET DAT.

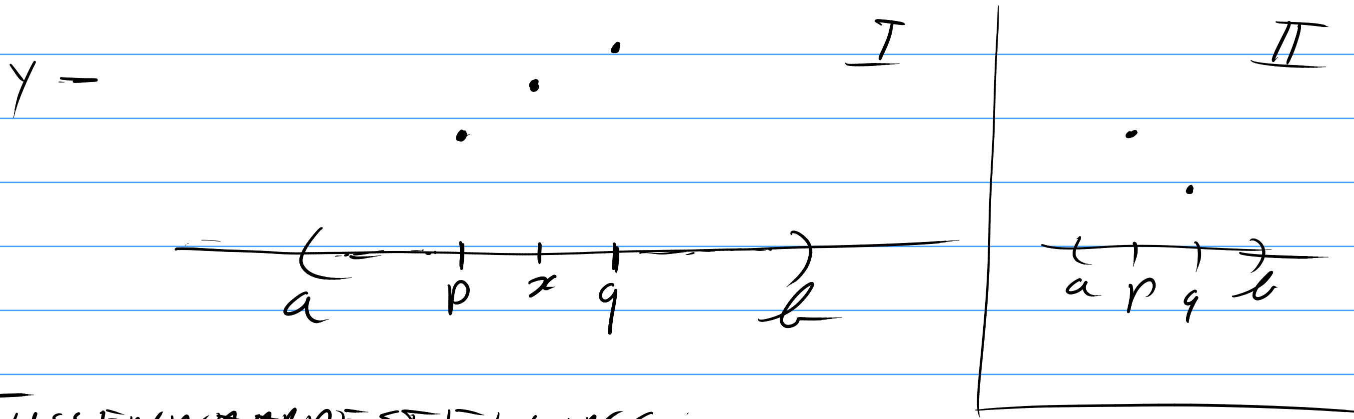
(5) $$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$$

INVARIANTIE VAN GEBIED IN $\mathbb{R}$

STEL $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ IS CONTINU EN INJECTIEF

DAN IS $f[(a,b)]$ OPEN

WANT f IS STRIKT STYGEND
OF STRIKT DALEND

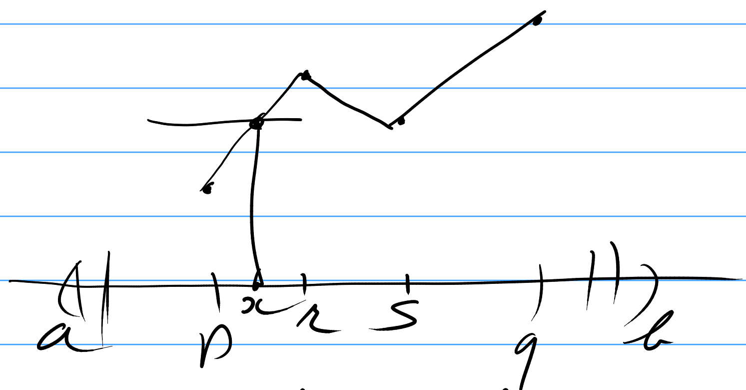


I TUSSENWAARDESTELLING:

VOOR ELKE y IN $(f(p), f(q))$
IS ER EEN $x \in (p,q)$
MET $f(x) = y$

DIE x IS DE ENIGE IN (a,b)

ALS $r < p$ DAN $f(r) \notin [f(p), f(q)]$
$r > q$ ——— '' ———

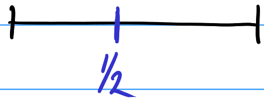


STEL $f(r) > f(s)$
DAN IS ER EEN $x \in (p,r)$
MET $f(x) = f(s)$ TEGENSPR.

TUSSENWAARDESTELLING:

$f[(a,b)]$ IS EEN
OPEN INTERVAL.

$$[0,1] \not\simeq [0,1]^2$$

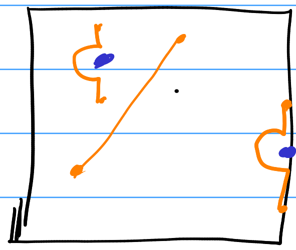


$[0,1]\setminus\{\tfrac{1}{2}\} =$

$\underline{[0,\tfrac{1}{2})} \cup \underline{(\tfrac{1}{2},1]}$

TWEE DISJ. OPEN VERZ.

½ IS EEN SNIJPUNT



$[0,1]^2\setminus\{(u,v)\}$
IS SAMENHANGEND

$[0,1]^2$ HEEFT
<u>GEEN</u> SNIJPUNTEN

OPGAVE
NEEM DE HOOFDLETTERS
IN HET ALFABET EN
DEEL DIE IN IN GROEPJES
HOMEOMORFE LETTERS

A B C D E F G H I J K L M N - -

T

$f: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ CONTINU

IS <u>NIET</u> INJECTIEF

$a = f(0,0) \qquad b = f(1,1)$

DAN ZIJN ER OVERAFT. VEEL (x,y)
MET $f(x,y) = \frac{1}{2}(a+b)$.

STELLING.

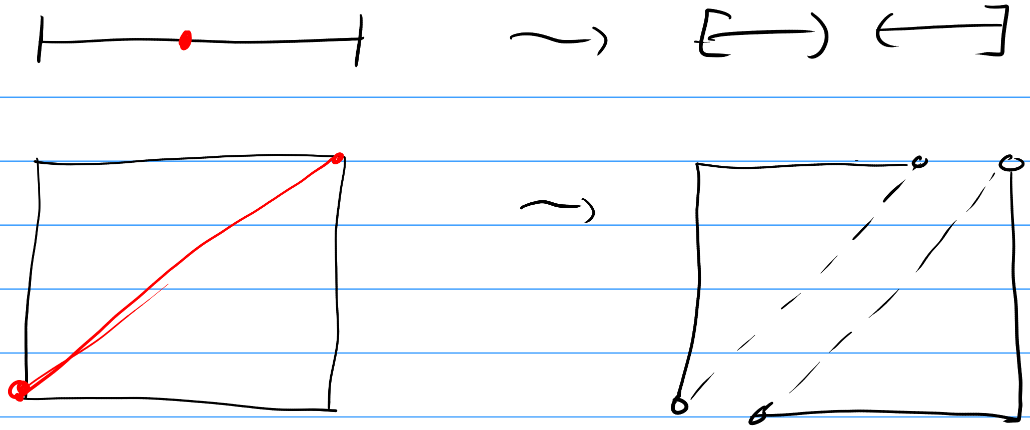
STEL (X,d) IS COMPACT, (Y,ρ) EEN METR. R.
$f: X \to Y$ CONTINU
EN BIJECTIEF
DAN IS f^{-1} OOK CONTINU.

VB $C \subseteq [0,1]$
$p: [0,1] \to [0,1]^2$ VAN PEANO
IS OP C INJECTIEF
EN $p[C] = C \times C$
CONCLUSIE p IS HOMEOMORFISME

NOTEER EVEN $g = f^{-1}$
T.B.
ALS $F \subseteq X$ GESLOTEN IS
DAN IS $g^{-1}[F]$ GESLOTEN IN Y
NB
$$g^{-1}[F] = f[F]$$
- F IS COMPACT WANT GESL. IN X
- DUS $f[F]$ IS COMPACT
- DUS $f[F]$ IS GESLOTEN IN Y

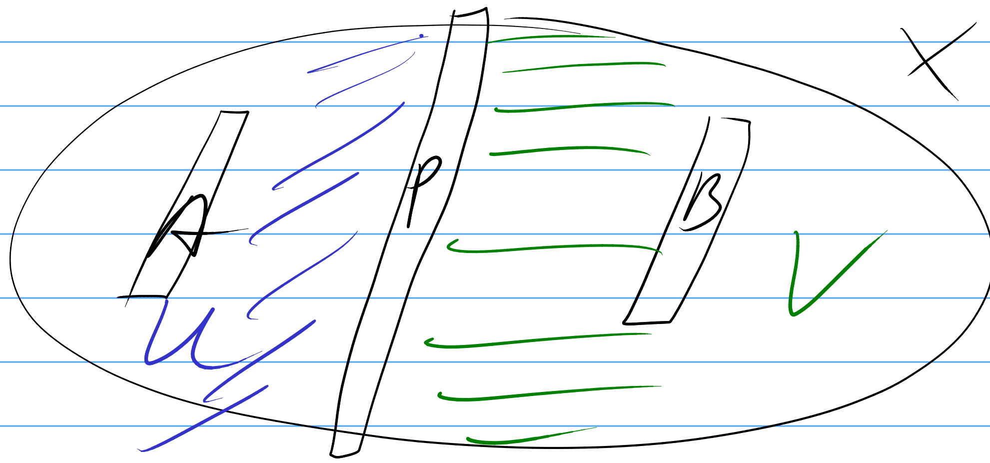
WE ZEGGEN WEL: f IS EEN GESLOTEN AFBEELDING.
F GESLOTEN $\Rightarrow$ $f[F]$ GESLOTEN

ALS X COMPACT EN $f: X \to Y$ CONTINU
DAN IS f EEN GESLOTEN AFB.



WAT NU ALS IK ZO'N KROMME WEGLAAT UIT $[0,1]^3$? IS HET RESULTAAT SAMENHANGEND?

ANTWOORD JA, BEWIJS: INGEWIKKELD



WE NOEMEN P EEN PARTITIE (VAN X) TUSSEN A EN B ALS

$$X \setminus P = U \cup V$$

MET
- U, V OPEN
- $U \cap V = \emptyset$
- $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

P IS DUS GESLOTEN

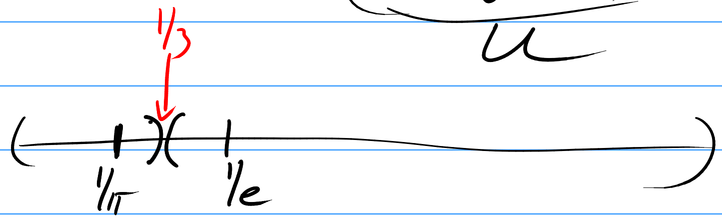
$\{1/2\}$ IS EEN PARTITIE VAN $[0,1]$ TUSSEN $\{0\}$ EN $\{1\}$

$[1/3, 2/3]$ IS DAT OOK: $U = [0, 1/3)$, $V = (1/3, 1]$

$\mathbb{P}$: $\emptyset$ IS EEN PARTITIE IN $\mathbb{P}$
TUSSEN $\{\frac{1}{\pi}\}$ EN $\{\frac{1}{e}\}$

$$\mathbb{P}\setminus\emptyset = ???$$

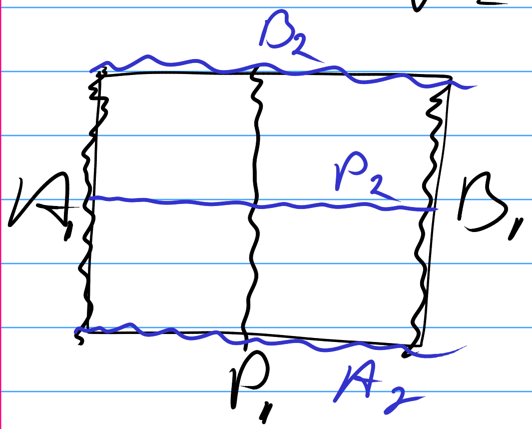
$$= \underbrace{\left((0,\tfrac{1}{3})\cap\mathbb{P}\right)}_{U} \cup \underbrace{\left((\tfrac{1}{3},1)\cap\mathbb{P}\right)}_{V}$$



IN $\mathbb{Q}$ IS $\emptyset$ EEN PARTITIE
TUSSEN $\{0\}$ EN $\{1\}$

$U = (-\infty, \frac{1}{\pi}) \cap \mathbb{Q}$

$V = (\frac{1}{\pi}, \infty) \cap \mathbb{Q}$



$A_1 = \{0\} \times [0,1]$

$P_1 = \{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$

$B_1 = \{1\} \times [0,1]$

$$P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$$

WE ZULLEN ZIEN:
WELKE PARTITIES P_1 TUSSEN A_1 EN B_1
P_2 TUSSEN A_2 EN B_2
WE OOK NEMEN ALTIJD GELDT

$$P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$$

HIER STAAT NIET $\dim [0,1]^2 \leq 1$

WE DEFINIËREN DIM X
VOOR METRISCHE RUIMTEN DOOR

DIM X $\leq n$ ALS

$\forall$ VOOR ELK $n+1$-TAL PAREN
DISJUNCTE GESLOTEN VERZ'N
$(A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$
BESTAAN PARTITIES

$\exists$ $P_0, P_1, \ldots, P_n$
MET P_i TUSSEN A_i EN B_i

ZÓ DAT $\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$

DIM X $= n$ ALS DIM X $\leq n$
EN NIET DIM X $\leq n-1$

$\neg \forall \exists \rightsquigarrow \exists \forall \neg$

NIET DIM X $\leq n-1$
ER IS EEN n-TAL PAREN
$(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$
ZÓDAT VOOR ALLE KEUZEN
$P_1, \ldots, P_n$
VAN PARTITIES GELDT

$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset$$