AM 3590 20210907

- $\dim X \leq n$:
  VOOR ELK $n+1$-TAL PAREN
  $(A_0, B_0), \ldots, (A_n, B_n)$
  VAN DISJUNCTE GESLOTEN VERZ'N
  BESTAAN PARTITIES
  $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (P_i TUSSEN A_i EN B_i)
  MET

$$\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$$

NB: ALS (X, d) EEN METRISCHE RUIMTE IS EN A EN B ZIJN GESL. EN DISJ. DAN IS ER EEN PARTITIE TUSSEN A EN B.

DEFINIEER $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$
DOOR

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

$(d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\})$

- f IS CONTINU
- $a \in A$: $f(a) = 0$
- $b \in B$: $f(b) = 1$

$P = \{x : f(x) = \frac{1}{2}\}$ ⟵
$U = \{x : f(x) < \frac{1}{2}\}$ ⟵ OPEN
$V = \{x : f(x) > \frac{1}{2}\}$ ⟵

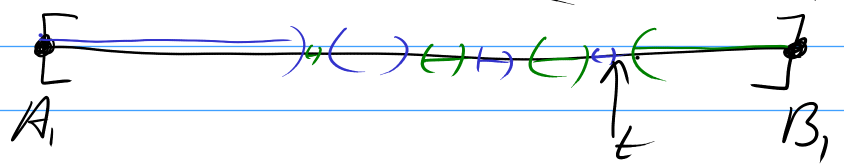
DIM $X \geq n$ (NIET DIM $X \leq n-1$)
ER ZIJN n PAREN $(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$
DISJ. GESL. VERZ'N ZO DAT
VOOR <u>ELKE</u> RIJ PARTITIES
$P_1, \ldots, P_n$ (P_i TUSSEN A_i EN B_i)
GELDT

$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset.$$

DIM $[0,1] \geq 1$ NEEM $A_1 = \{0\}$
$B_1 = \{1\}$

ALS $A_1 \subseteq U$ EN $B_1 \subseteq V$ OPEN
EN DISJUNCT DAN

$$P = [0,1] \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$$



NEEM $t = \sup U$

- $t \notin U$ WANT U IS OPEN
  ALS $t \in U$ DAN $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq U$
  VOOR EEN $\varepsilon > 0$
- $t \notin V$ ALS $t \in V$ DAN IS ER
  EEN $\varepsilon > 0$ MET $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subseteq V$
  DAN IS $t-\varepsilon$ OOK EEN BOVENGR
  VAN U

<u>MIJN P</u> IS NIET LEEG.

DIM $X = 0$ BETEKENT
ALS A_0 EN B_0 GESL. EN DISJ.
ZIJN DAN IS $\emptyset$ EEN
PARTITIE TUSSEN A_0 EN B_0
DWZ ER ZIJN OPEN U EN V MET
$A_0 \subseteq U$, $B_0 \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$

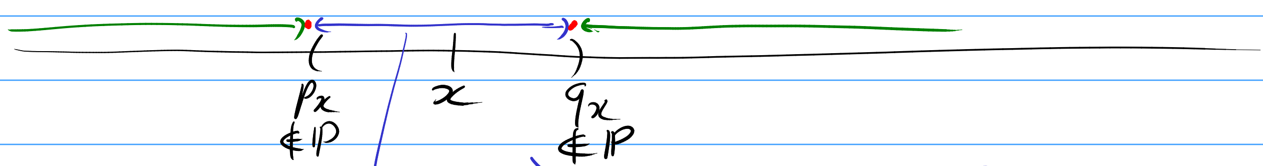
$\dim \mathbb{Q} = \dim \mathbb{P} = 0 = \dim C$

CANTORVERZ.

$\dim \mathbb{P} = 0$ STEL A_0 EN B_0 ZIJN GESLOTEN EN DISJUNCT.

VOOR ELKE $x \in \mathbb{P}$ NEMEN WE p_x EN q_x IN $\mathbb{Q}$ ZÓ DAT

- $x \in (p_x, q_x)$ BEKIJK ZE IN $\mathbb{P}$
- ALS $x \notin B_0$ DAN $(p_x, q_x) \cap B_0 = \emptyset$
- ALS $x \notin A_0$ DAN $(p_x, q_x) \cap A_0 = \emptyset$



OPEN ÈN GESLOTEN IN $\mathbb{P}$

OOK GELIJK AAN $[p_x, q_x] \cap \mathbb{P}$

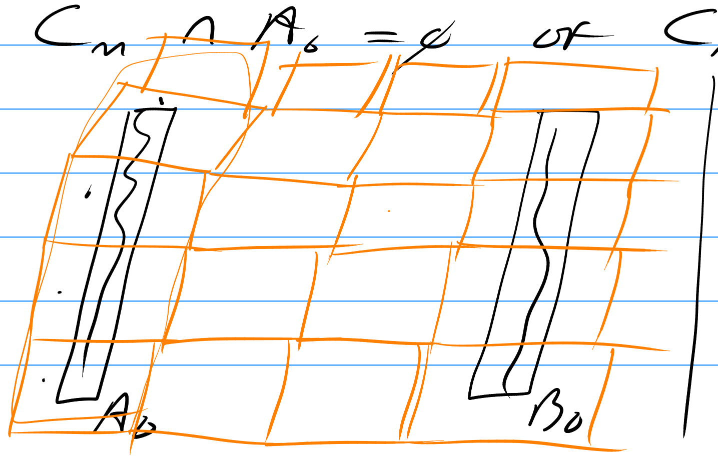
DE VERZ. INTERVALLEN IS AFTELBAAR!

NUMMER ZE ALS $\{ I_n : n \in \mathbb{N} \}$

MAAK NU TELKENS

$$C_n = I_n \setminus \bigcup_{i<n} I_i$$

- ELKE I_n IS OPEN-EN-GESLOTEN
  DUS C_n IS OPEN EN GESLOTEN
- $m < n \rightarrow C_m \cap C_n = \emptyset$
- $C_n \cap A_0 = \emptyset$ OF $C_n \cap B_0 = \emptyset$



$\bigcup_n I_n = \mathbb{P}$

DUS

$\bigcup_n C_n = \mathbb{P}$

$D = \{ n : C_n \cap A_0 \neq \emptyset \}$
$E = \{ n : C_n \cap A_0 = \emptyset \}$
$U = \bigcup_{n \in D} C_n$ --- $A_0 \subseteq U$
$V = \bigcup_{n \in E} C_n$ --- $B_0 \subseteq V$
$U \cap V = \emptyset \quad U \cup V = \mathbb{P}$

OPGAVE $\quad \dim \mathbb{Q} = 0$
$\dim C = 0$

DOEL: $\underline{\dim [0,1]^n = \dim \mathbb{R}^n = n}$

① $\dim [0,1]^n \leq \dim \mathbb{R}^n$

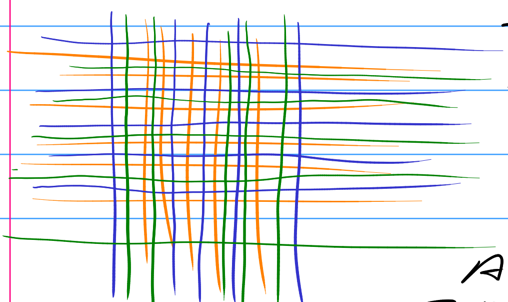
ALGEMENE STELLING.
ALS F GESLOTEN IS IN X
DAN GELDT $\dim F \leq \dim X$.
BEWIJS
<u>ALS</u> $\dim X \leq n$ <u>DAN</u> $\dim F \leq n$
STEL $(A_0, B_0), \ldots, (A_n, B_n)$ IS
EEN $n+1$-TAL PAREN DISJ. GESL.
VERZ'N <u>IN F</u>
[ALS F GESLOTEN IS IN X EN A IS
GESLOTEN <u>IN F</u> DAN IS A GESLOTEN <u>IN X</u>]
DAN DIT OOK EN $n+1$-TAL PAREN
GESLOTEN DISJUNCTE VERZ'N <u>IN X</u>
ER ZIJN PARTITIES $P_0, \ldots, P_n$
<u>IN X</u> MET $\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$
DAN IS $P_0 \cap F, \ldots, P_n \cap F$ EEN
RIJ PARTITIES <u>IN F</u> MET $\bigcap_{i=0}^{n} (P_i \cap F) = \emptyset$

(2) $\dim \mathbb{R}^n \leq n$.

LEMMA
LAAT A EN B GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN IN $\mathbb{R}^n$ DAN IS ER EEN PARTITIE P TUSSEN A EN B MET DE VOLGENDE EIGENSCHAP:
ALS $y \in P$ DAN IS EEN COORDINAAT VAN y DIE IN $\mathbb{Q}$ ZIT.
WE KUNNEN $\mathbb{Q}$ VERVANGEN DOOR ELKE DICHTE DEELVERZ. VAN $\mathbb{R}$.
BIJV $\mathbb{Q}+\sqrt{2}$, $\mathbb{Q}+2\sqrt{2}$, $\mathbb{Q}+\pi$, ...

$n=1$ IN $\mathbb{R}$
GEGEVEN (A_0, B_0) EN (A_1, B_1)
LEMMA : - ER IS EEN P_0 MET
$P_0 \subseteq \mathbb{Q}$
- ER IS EEN P_1 MET
$P_1 \subseteq \mathbb{Q}+\pi$
DAN $P_0 \cap P_1 = \emptyset$
DUS $\dim \mathbb{R} \leq 1$

$n=2$ (A_0, B_0), (A_1, B_1), (A_2, B_2)
- $P_0 \subseteq (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$
- $P_1 \subseteq ((\mathbb{Q}+\sqrt{2}) \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times (\mathbb{Q}+\sqrt{2}))$
- $P_2 \subseteq ((\mathbb{Q}+2\sqrt{2}) \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times (\mathbb{Q}+2\sqrt{2}))$



$\bullet \cap \bullet \cap \bullet = \emptyset$

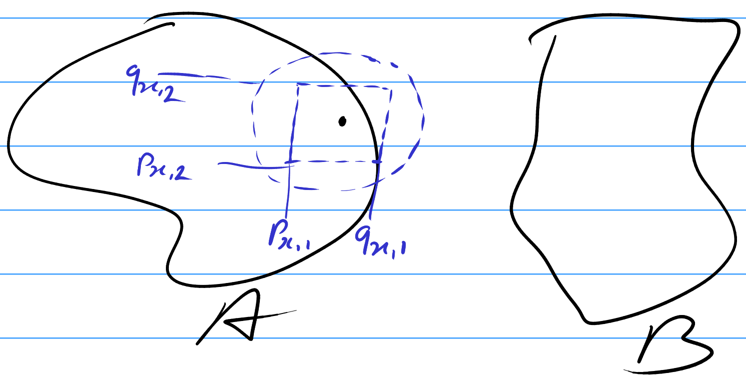
ALS (x,y) IN DE DOORSNEDE ZIT DAN HEEFT HET EEN ORANJE, BLAUWE EN GROENE COORD.

DAT ZIJN DRIE COORDINATEN

IDEM VOOR ELKE $n \geq 1$:
(A_0, B_0) — — — (A_n, B_n)
LEMMA: P_i TUSSEN A_i EN B_i
MET: ALS $y \in P_i$ DAN
IS ER EEN COORDINAAT VAN y
IN $\mathbb{Q} + i\sqrt{2}$
ALS $y \in \bigcap_{i=0}^{n} P_i$
DAN ZOU y $n+1$ COORDINATEN
MOETEN HEBBEN.

BEWIJS VAN HET LEMMA.
NEEM A EN B GESLOTEN
EN DISJUNCT.
VOOR $x \in A$ NEMEN WE EEN
OPEN BLOK
$O_x = (p_{x,1}, q_{x,1}) \times (p_{x,2}, q_{x,2}) \times \cdots \times (p_{x,n}, q_{x,n})$

- $x \in O_x$
- $\overline{O_x} = [p_{x,1}, q_{x,2}] \times \cdots \times [p_{x,n}, q_{x,n}]$
  IS DISJUNCT VAN B.
- $q_{x,i} - p_{x,i} < 1$
- $p_{x,i}$ EN $q_{x,i}$ ZITTEN IN $\mathbb{Q}$



NEEM $F_1 \subseteq A \cap [-1,1]^n$ EINDIG
ZÓ DAT $A \cap [-1,1]^n \subseteq \bigcup_{x \in F_1} O_x$

- $\overbrace{A \cap [-2,2]^n \setminus \bigcup_{x \in F_1} O_x}^{A_2}$ IS COMPACT

NEEM F_2 EINDIG HIERIN ZÓDAT

$$A_2 \subseteq \bigcup_{x \in F_2} O_x$$

DVS

$$A \cap [-2,2]^n \subseteq \bigcup_{x \in F_1} O_x \cup \bigcup_{x \in F_2} O_x$$

- GEGEVEN $F_1, F_2, \ldots, F_k$ ZÓ DAT

$$A \cap [-k,k]^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{x \in F_i} O_x$$

BEKYK $A_{k+1} = A \cap [-(k+1), k+1]^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{x \in F_i} O_x$

NEEM $F_{k+1} \subseteq A_{k+1}$ EINDIG MET $A_{k+1} \subseteq \bigcup_{x \in F_{k+1}} O_x$.

$F_{k+1} \subseteq A \cap [-(k+1), k+1]^n \setminus [-k,k]^n$

$\llcorner x \in F_{k+1}$: ALLE $x_i \leq k+1$

EEN $x_i > k$

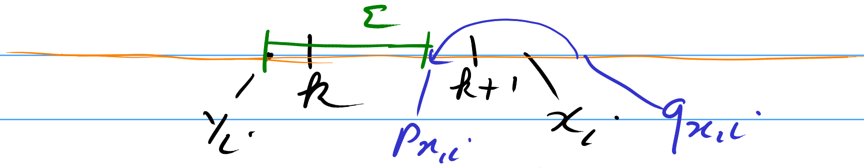
STEL $y \in \mathbb{R}^n$ NEEM k MET $y \in [-k,k]^n$

STEL $x \in F_{k+2} \cup F_{k+3} \cup \ldots$

ALLE $|y_i| \leq k$

EEN $|x_i| > k+1$

$p_{x,i}, q_{x_i}$ $\boxed{q_{x_i} - p_{x_i} < 1}$



$B(y, \varepsilon/2) \cap O_x = \emptyset$

ELK PUNT $y \in \mathbb{R}^n$ HEEFT EEN OMGEVING DIE MAAR EINDIG VEEL O_x-EN SNIJDT WAARBIJ

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

- $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{x \in F_i} O_x$
  DIT WORDT U
- NEEM $\overline{U}$ EN $V = \mathbb{R}^n \setminus \overline{U}$
- $P = \mathbb{R}^n \setminus (U \cup V)$
  DAN $P \subseteq$ RAND U
- $\overline{U} \cap B = \emptyset$ MAAR $B \subseteq V$

NEEM $y \in P$ NEEM k MET $|y_i| \leq k$

VOOR $x \in \bigcup_{i \geq k+2} F_i$ GELDT
DAN $y \notin \overline{O_x}$

DUS y ZIT IN

$$\overline{\bigcup_{i \leq k+1} \bigcup_{x \in F_i} O_x}$$

$$= \bigcup_{i \leq k+1} \bigcup_{x \in F_i} \overline{O_x}$$

MAAR $y \notin \bigcup_{i \leq k+1} \bigcup_{x \in F_i} O_x$

ER IS EEN x ZÓ DAT

$$y \in \prod_{i=1}^{n} [p_{x,i}, q_{x,i}] \setminus \prod_{i=1}^{n} (p_{x,i}, q_{x,i})$$

DWZ ER IS EEN i ZÓ DAT $y_i \in \{p_{x,i}, q_{x,i}\}$

- $y \in B$ DAN $y \notin \overline{U}$

NEEM k MET $|y_i| \leq k$ ALLE

- DAN ER IS $\varepsilon > 0$ ZÓ DAT

$$B(y,\varepsilon) \cap \bigcup_{i \geq k+2} \bigcup_{x \in F_i} O_x = \emptyset$$

- VOOR $x \in \bigcup_{i \leq k+1} F_i$ GELDT

$$\overline{O_x} \cap B = \emptyset$$

ER IS EEN (KLEINERE) δ ZÓ DAT

$$B(y,\delta) \cap \bigcup_{i \leq k+1} \bigcup_{x \in F_i} O_x = \emptyset$$

HIER STAAT $B(y,\delta) \cap U = \emptyset$

DUS $\underline{y \notin \overline{U}}$