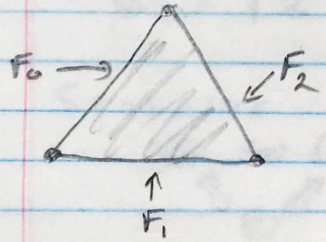
1. We hebben
$$\dim [0,1]^n \leq \dim \mathbb{R}^n \leq n$$

2. We kunnen ook bewijzen dat $\dim \mathbb{R}^n \leq \dim [0,1]^n$ met behulp van de aftelbare-gesloten-somstelling:
Als $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ met elke F_i gesloten en $\dim F_i \leq n$ voor alle i dan $\dim X \leq n$.
Het bewijs komt misschien later.

3. Opgave
$\dim X \leq n$ desda voor elke rij van $n+2$ gesloten verzamelingen $F_0, F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}$ met $\bigcap_{i=0}^{n+1} F_i = \emptyset$ bestaan $n+2$ gesloten verz'n $G_0, G_1, \ldots, G_n, G_{n+1}$ zó dat
- $F_i \subseteq G_i$ alle i
- $\bigcap_{i=0}^{n+1} G_i = \emptyset$
- $\bigcup_{i=0}^{n+1} G_i = X$.

desda voor elke rij van $n+2$ open verzamelingen $U_0, U_1, \ldots, U_n, U_{n+1}$ met $\bigcup_{i=0}^{n+1} U_i = X$ bestaan $n+2$ open verzamelingen $V_0, V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}$ zó dat
- $V_i \subseteq U_i$ alle i
- $\bigcup_{i=0}^{n+1} V_i = X$
- $\bigcap_{i=0}^{n+1} V_i = \emptyset$



$F_0 \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$
maar als $F_i \subseteq G_i$ en $G_0 \cup G_1 \cup G_2 = X$
dan moet $G_0 \cap G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.
daarom dim ≥ 2

ⓐ We gaan bewijzen dat de paren zijkanten $A_i = \{x : x_i = 0\}$
$B_i = \{x : x_i = 1\}$
laten zien dat $\dim [0,1]^n \geq n$

Merkwaardige(?) stelling
Als er een metrische ruimte X is met $\dim X \geq n$
Dan geldt voor elke rij partities $P_1, \ldots, P_n$ met P_i tussen A_i en B_i in $[0,1]^n$ dat $\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset$.

Een aantal beweringen

ⓐ Voor elke rij partities $P_1, \ldots, P_n$ met P_i tussen A_i en B_i in $[0,1]^n$ geldt $\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset$

ⓑ Als $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ continu is dan is er een $x \in [0,1]^n$ met $f(x) = x$
[Dekpuntstelling van Brouwer]

ⓒ Er is geen continue afbeelding $f : B^n \to B^n$ zodat
- $f[B_n] \subseteq S^{n-1}$
- $f(x) = x$ als $x \in S^{n-1}$

[Geen-retractiestelling]
$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$

Stelling

$$\begin{array}{ccc} ⓐ & \Leftrightarrow & ⓑ \\ & \Leftrightarrow \; ⓒ \; \Leftrightarrow & \end{array}$$

OPGAVE

BEWYS: ER IS EEN HOMEOMORFISME

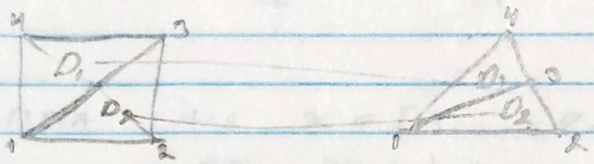
$$f : [0,1]^n \longrightarrow B^n$$

ZŌDAT $S^{n-1} = f[\{x : (\exists i)(x_i = 0 \vee x_i = 1)\}]$

WE GAAN BROUWER'S DEKPUNTSTELLING BEWYSEN.

OPGAVE: GEEF EEN BEWYS VOOR $n = 1$.

IN PLAATS VAN MET $[0,1]^n$ WERKEN WE MET SIMPLEXES.



EEN VERZAMELING PUNTEN $\{a_0, \ldots, a_k\}$ IN $\mathbb{R}^n$ HEET AFFIEN ONAFHANKELYK (OF IN ALGEMENE LIGGING)
ALS $\{a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0\}$ LINEAIR ONAFHANKELYK IS.

EQUIVALENT:

<u>ALS</u> $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$

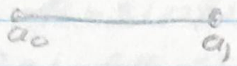
EN $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$

<u>DAN</u> $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$

EEN AFFIEN ONAFHANKELYKE VERZAMELING $\{a_0, \ldots, a_k\}$ BEPAALT EEN k-SIMPLEX $[a_0, \ldots, a_k]$ ALS VOLGT

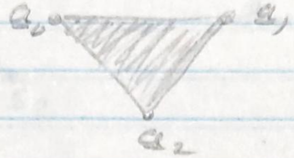
$$[a_0, \ldots, a_k] = \left\{ \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_k a_k : \lambda_0 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0, \ \lambda_0 + \cdots + \lambda_k = 1 \right\}$$

$k = 1$:



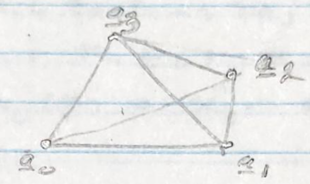
LYNSTUK

$k = 2$:



DRIEHOEK

$k = 3$:



TETRAEDER

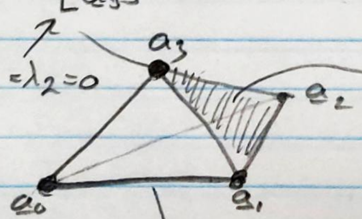
LEMMA ALS $x \in [a_0, \dots, a_k]$
EN $x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_k a_k$
$= \mu_0 a_0 + \dots + \mu_k a_k$
DAN $\lambda_0 = \mu_0, \dots, \lambda_k = \mu_k$.

DE λ_i ZYN DE <u>BARYCENTRISCHE</u> COORDINATEN VAN $\underline{x}$

ZYKANTEN : ALS $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_l}\} \subseteq \{a_0, \dots, a_k\}$
DAN $[a_{i_0}, \dots, a_{i_l}] \subseteq [a_0, \dots, a_k]$
$[a_{i_0}, \dots, a_{i_l}] = \{x : \lambda_i = 0 \text{ ALS } i \notin \{i_0, \dots, i_l\}\}$
EEN l-DIMENSIONAAL <u>FACET</u> (OF ZYKANT)
VAN $[a_0, \dots, a_k]$

$[a_3]$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$



$[a_1, a_2, a_3]$ MET $\lambda_0 = 0$

$[a_0, a_1]$ MET $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$