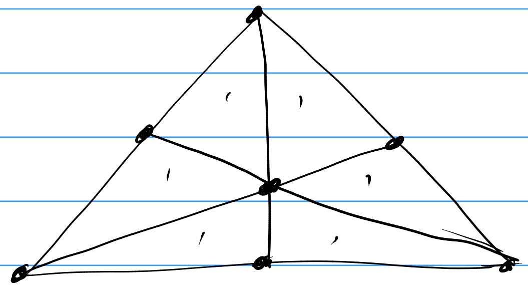
AM 3590 2021-09-14



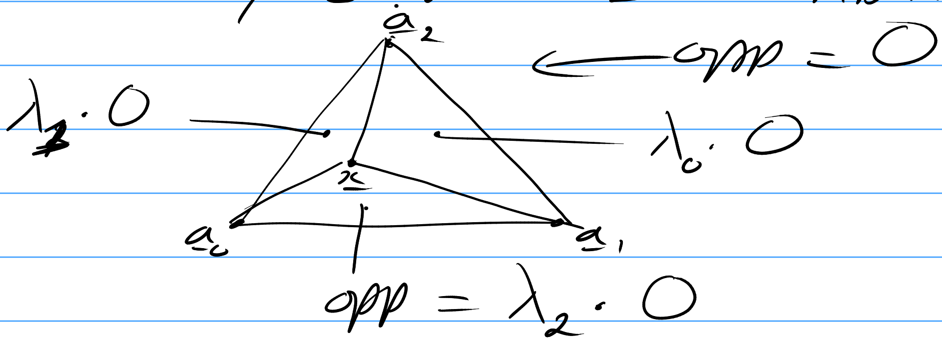
$S = [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k]$

$\underline{x} \in S$ DESDA $\underline{x} = \lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k$

MET
- $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$
- $\lambda_i \geq 0$ ALLE i

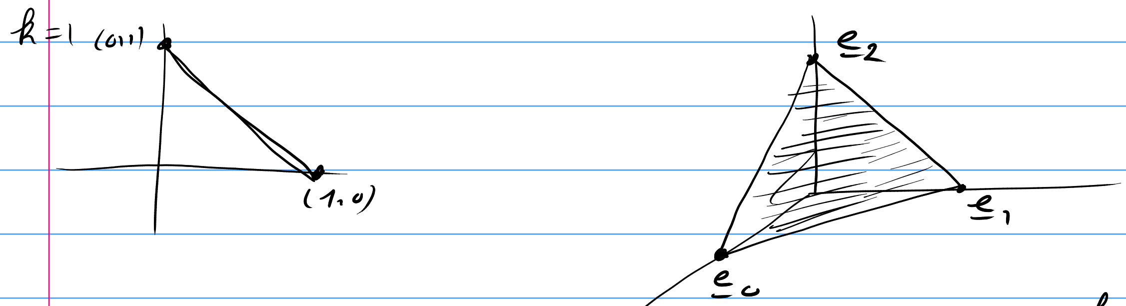
DE λ_i ZIJN UNIEK

BARYCENTRISCHE COÖRDINATEN VAN $\underline{x}$



DE λ_i ZIJN CONTINUE FUNCTIES VAN $\underline{x}$

STANDAARD k-SIMPLEX IN $\mathbb{R}^{k+1}$



STAND. BASIS $\{\underline{e}_0, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k\}$ VOOR $\mathbb{R}^{k+1}$

NEEM $[\underline{e}_0, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k]$ HET STAND. SIMPLEX

VOOR $\underline{x} \in [\underline{e}_0, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k]$ GELDT

$\underline{x} = x_0 \underline{e}_0 + x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_k \underline{e}_k$

DUS $\lambda_i(\underline{x}) = x_i$

$$\Lambda : [\underline{e}_0, \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k] \longrightarrow [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k]$$
$$x \longmapsto x_0\underline{a}_0 + x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_k\underline{a}_k$$

Λ IS CONTINU WANT LINEAIR

DE SIMPLICES ZIJN COMPACT

DUS Λ^{-1} IS CONTINU

(Λ IS EEN BIJECTIE)

$$\Lambda^{-1}(\underline{y}) = (\lambda_0(\underline{y}), \lambda_1(\underline{y}), \ldots, \lambda_k(\underline{y}))$$

DUS DE λ_i ZIJN CONTINU.

ALLE k-SIMPLICES ZIJN HOMEOMORF.

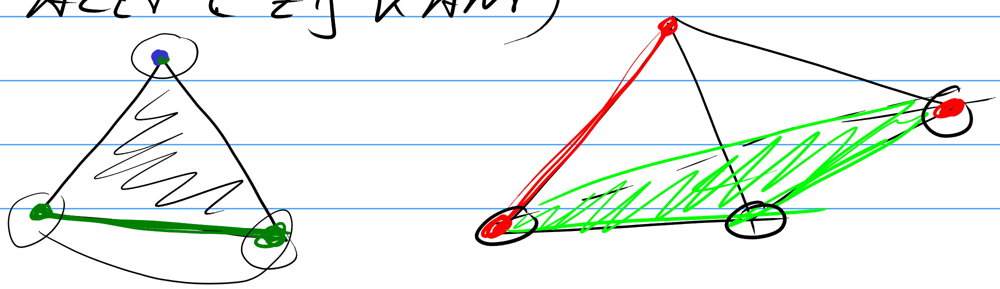
OPGAVE: MAAK FORMULES VOOR DE λ_i

=

ONDERVERDELING VAN $S = [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k]$ IS EEN VERZAMELING $\wp$ VAN SIMPLICES MET

- $\wp$ IS EINDIG.
- $\cup \wp = S$
- ALS $P, Q \in \wp$
  DAN: $P \cap Q = \emptyset$
  OF $P \cap Q$ IS EEN GEMEENSCHAPPELIJK FACET VAN P EN Q
- ALS $P \in \wp$ DAN ZITTEN ALLE FACETTEN VAN P OOK IN $\wp$.

FACET (ZIJKANT)



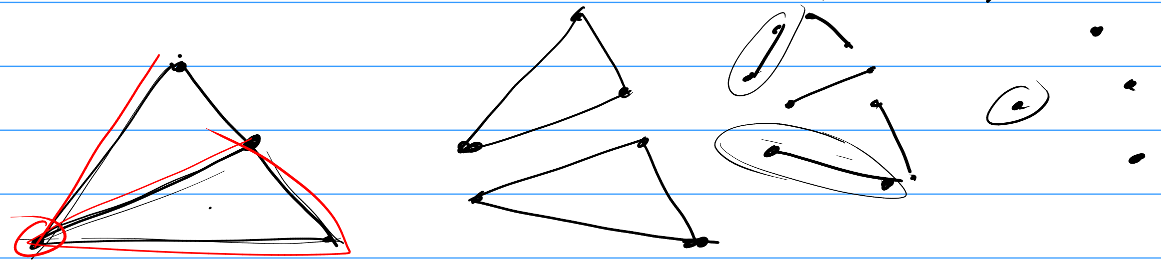
FACET: NEEM $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_l}\} \subseteq \{a_0, \dots, a_k\}$

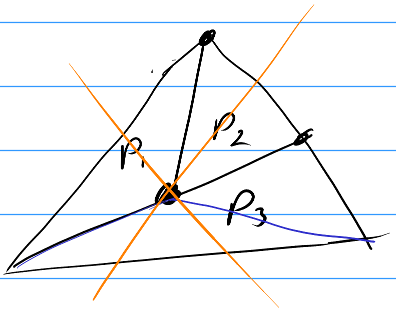
DAN IS $[a_{i_0}, \dots, a_{i_l}]$ EEN FACET

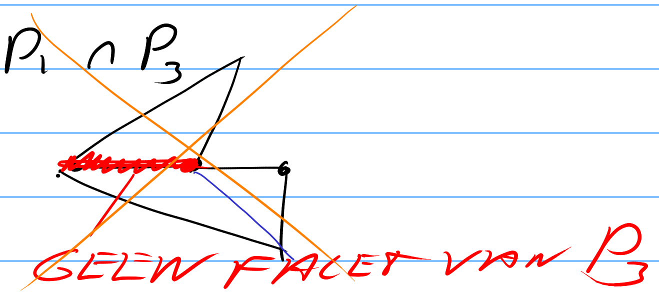
$$[a_{i_0}, \dots, a_{i_l}] = \left\{ x \in [a_0, \dots, a_k] : \begin{array}{l} \text{ALS } i \notin \{i_0, \dots, i_l\} \\ \text{DAN } \lambda_i(x) = 0 \end{array} \right\}$$

$$x = \mu_0 a_{i_0} + \dots + \mu_l a_{i_l} \qquad \mu_0 + \dots + \mu_l = 1$$

$$= \mu_0 a_{i_0} + \dots + \mu_l a_{i_l} + \underbrace{\sum 0 a_i}_{\text{REST VAN DE } i\text{'s}}$$



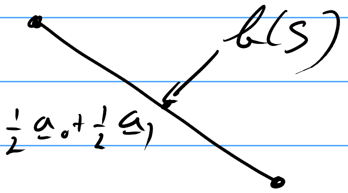


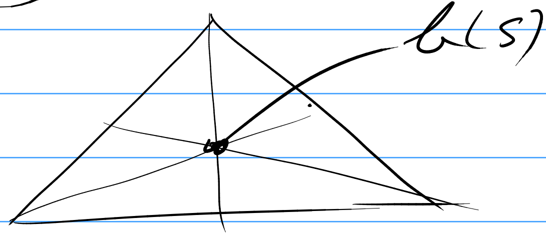


BARYCENTRUM (ZWAARTEPUNT)

VAN $[a_0, a_1, \dots, a_k]$

$$\underbrace{\frac{1}{k+1} a_0 + \frac{1}{k+1} a_1 + \dots + \frac{1}{k+1} a_k}_{b(S)}$$





$S = [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k]$

VOOR ELKE DALENDE RIJ ZIJKANTEN VAN S : $P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_\ell$

(ALLEEN P_0 MOGELIJK)

BEKIJK DE ZWAARTEPUNTEN

$b(P_0), b(P_1), \ldots, b(P_\ell)$

DEZE ZIJN WEER AFFIEN ONAFH.

ALS $\begin{cases} \mu_0 b(P_0) + \cdots + \mu_\ell b(P_\ell) = 0 \\ \mu_0 + \cdots + \mu_\ell = 0 \end{cases}$ k

DAN $\mu_0 = \cdots = \mu_\ell = 0$

(1) ELKE P_j HOORT BIJ $F_j \subseteq \{a_0, \ldots, a_k\}$

MET $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_\ell$

VOOR HET GEMAK:

$F_j \subseteq \{0, 1, \ldots, k\}$

$P_j = [\underline{a}_i : i \in F]$

$\{0, 1, \ldots, k\} \setminus F_0 \leftarrow$ KAN $\emptyset$ ZIJN

$F_0 \setminus F_1 \leftarrow$ NIET $\emptyset$

$F_1 \setminus F_2 \leftarrow$ NIET $\emptyset$

$\vdots$

$F_{\ell-1} \setminus F_\ell \leftarrow$ NIET $\emptyset$

$F_0 \setminus F_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$

$\underset{}{F_0}, \underset{G_3}{F_0 \setminus \{i_1\}}, \underset{G_4}{F_0 \setminus \{i_1, i_2\}}, \underset{G_5}{F_1}$

$\{0, 1, \ldots, k\} \setminus F_0 = \{i, j\}$

$\underset{G_0}{\{0, \ldots, k\}}, \underset{G_1}{F_0 \cup \{j\}}, \underset{G_2}{F_0}$

IK KAN EEN RIJ $G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k$ MAKEN WAARBIJ

$G_i \setminus G_{i+1}$ UIT ÉÉN PUNT BESTAAT $i < k$

EN $F_0 \supset F_1 \; - - \supset F_\ell$

IS DAAR EEN DEELRIJ VAN

$$G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset G_4 \supset G_5 \supset \cdots$$

$$F_0 \supset F_1 \supset \cdots$$

ZBDA: $\underline{\ell = k}$

$$P_0 = [a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}]$$

$$P_1 = [a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}]$$

$$\vdots$$

$$P_k = [a_{i_k}]$$

$(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ IS EEN PERMUTATIE VAN $(0, 1, \ldots, k)$

$$b(P_0) = \frac{1}{k+1} a_{i_0} + \frac{1}{k+1} a_{i_1} + \cdots + \frac{1}{k+1} a_{i_k}$$

$$b(P_1) = \frac{1}{k} a_{i_1} + \cdots + \frac{1}{k} a_{i_k}$$

$$b(P_2) = \frac{1}{k-1} a_{i_2} + \cdots \frac{1}{k-1} a_{i_k}$$

$$\vdots$$

$$b(P_k) = a_{i_k}$$

$$(0 =) \sum \mu_i b(P_i) = \underbrace{\mu_0 \frac{1}{k+1}}_{\lambda_{i_0}} a_{i_0} + \underbrace{\left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k}\right)}_{\lambda_{i_1}} a_{i_1} + \underbrace{\left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} + \mu_2 \frac{1}{k-1}\right)}_{\lambda_{i_2}} a_{i_2} + \cdots + \underbrace{\left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \left(\frac{1}{k}\right) + \cdots + \mu_k\right)}_{\lambda_{i_k}} a_{i_k}$$

SOM VAN DIE COËFFICIËNTEN

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$$

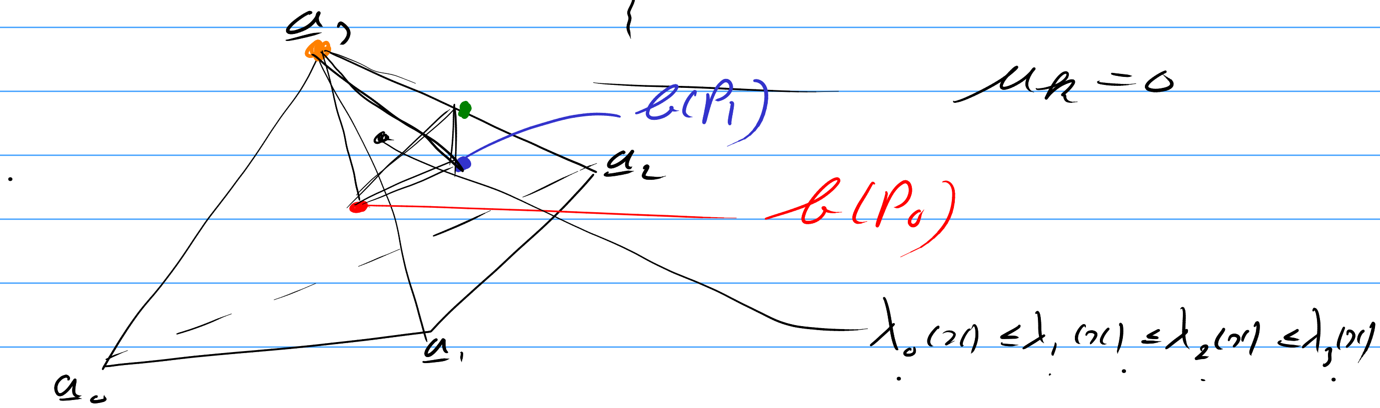
EN DAT IS NUL

DUS $\mu_0 \cdot \frac{1}{k+1} = 0$ $\qquad \mu_0 = 0$

$\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} = 0$ $\qquad \mu_1 = 0$

$\vdots$

$\mu_k = 0$



$P_0 = [a_0, a_1, a_2, a_3]$

$P_1 = [a_1, a_2, a_3]$

$P_2 = [a_2, a_3]$

$P_3 = [a_3]$

ELKE PERMUTATIE GEEFT ZO'N 3-SIMPLEX

$4! = 24$ DUS

ZO KRIJGEN WE 24 3-SIMPLICES

HET SIMPLEX $[b(P_0), b(P_1), \dots, b(P_k)] \leftarrow$ IS OOK TE BESCHRIJVEN DOOR

$$\{x \in S : \lambda_{i_0}(x) \leq \lambda_{i_1}(x) \leq \dots \leq \lambda_{i_k}(x)\}$$

VOOR EEN PUNT x IN $[b(P_0), b(P_1), \dots, b(P_k)]$

GELDT:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{i_0} \\ \lambda_{i_1} \\ \vdots \\ \lambda_{i_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{k+1} & 0 & \cdots & & & 0 & \lambda_{i_0} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & 0 & \cdots & & 0 & \lambda_{i_1} \\ & & & & & & \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k-1} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \lambda_{i_{k-1}} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k-1} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & \lambda_{i_k} \end{array}\right)$$

ELIMINEER: TREK RIJ $J-1$ AF VAN RIJ J
VAN ONDER NAAR BOVEN;
$J = k, k-1, k-2, \ldots, 1$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \frac{1}{k+1} & 0 & \cdots & & & 0 & \lambda_{i_0} \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & \cdots & & 0 & \lambda_{i_1} - \lambda_{i_0} \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \lambda_{i_{k-1}} - \lambda_{i_{k-2}} \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & \lambda_{i_k} - \lambda_{i_{k-1}} \end{array}\right)$$

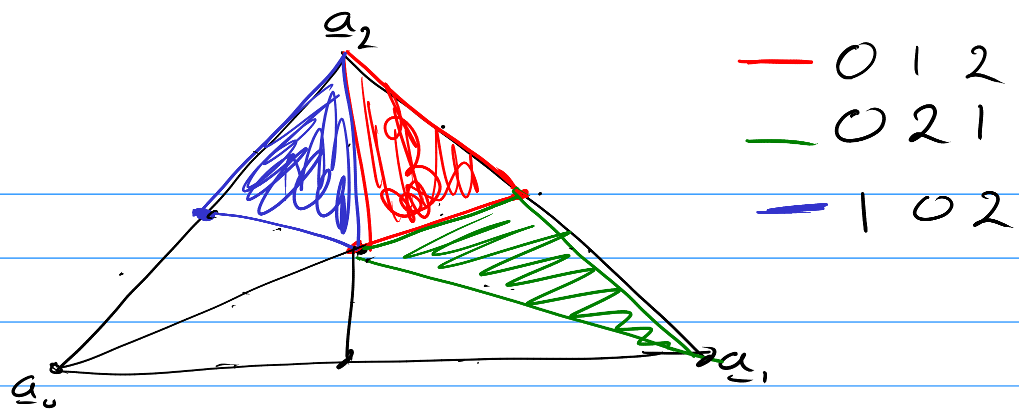
$$\lambda_{i_0} = \frac{1}{k+1} \cdot \mu_0$$

$$\lambda_{i_1} - \lambda_{i_0} = \frac{1}{k} \mu_1 \geq 0 \quad : \quad \lambda_{i_1} \geq \lambda_{i_0}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{i_k} - \lambda_{i_{k-1}} = \mu_k \geq 0 \quad : \quad \lambda_{i_k} \geq \lambda_{i_{k-1}}$$

DE VERZAMELING VAN
ALLE SIMPLICES VAN DE VORM
$[b(P_0), \ldots, b(P_\ell)]$
VOOR ELKE DALENDE RIJ $P_0 \supset \cdots \supset P_\ell$
ZIJKANTEN
IS EEN SIMPLICIALE ONDERVERDELING VAN S



DE ONDERVERDELING BESTAAT
UIT ZES 2-SIMPLICES
TWAALF 1-SIMPLICES
ZEVEN 0-SIMPLICES

HET IS EEN ONDERVERDELING:

- EINDIG VEEL SIMPLICES,
- OVERDEKT S
  ALS $x \in S$ DAN IS ER EEN PERMUTATIE $i_0, i_1 \dots, i_k$
  MET $\lambda_{i_0}(x) \leq \lambda_{i_1}(x) \leq \dots \leq \lambda_{i_k}(x)$
  DAT WIJST EEN k-SIMPLEX AAN WAAR x IN ZIT.
- FACETTEN VAN ELEMENTEN ZITTEN ER IN PER DEFINITIE
- $P \cap Q = \emptyset$ OF $P \cap Q$ IS EEN GEMEENSCH. FACET