AM 3590 20210917

DE FAMILIE SIMPLICES VAN DE VORM $[b(P_0), \dots, b(P_\ell)]$
IS EEN ONDERVERDELING VAN S.

- VERENIGING IS S : ELKE $x \in S$ BEPAALT
  EEN PERMUTATIE ZÓDAT $\lambda_{i_0}(x) \le \lambda_{i_1}(x) \dots \le \lambda_{i_k}(x)$
  DAN $x \in [b(P_0), \dots, b(P_k)]$
- FACETTEN VAN SIMPLICES DOEN OOK MEE
- DOORSNEDE $P \cap Q$?
  ALS $\emptyset$ KLAAR
  ALS NIET $\emptyset$
  $P = [b(P_{j_0}), \dots, b(P_{j_\ell})]$
  EN ER IS EEN PERMUTATIE $(i_0, \dots, i_k)$
  ZÓ DAT $P_{j_0} \supset \dots \supset P_{j_\ell}$ EEN DEELRIJ
  VAN $P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_k$ IS
  EN $P = \{ x \in [b(P_0), \dots, b(P_k)] :$
  $j \notin \{j_0, \dots, j_\ell\} \to \mu_j = 0 \}$
  . $\mu_j = 0$ BETEKENT $\lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j-1}}$
  DUS P IS BEPAALD DOOR EEN
  STEL GELYKHEDEN $\lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j-1}}$ OF $\lambda_{i_0} = 0$
  EN ONGELYKHEDEN $\lambda_{i_j} \ge \lambda_{i_{j-1}}$
  IDEM VOOR Q EEN PERMUTATIE π
  EN $\lambda_{\pi(j)} = \lambda_{\pi(j-1)} \dots \lambda_{\pi(0)} = 0$
  $\lambda_{\pi(j)} \ge \lambda_{\pi(j-1)}$
  VOOR P PAREN (i,j) MET $\lambda_i = \lambda_j$
  Q PAREN (i,j) MET $\lambda_i = \lambda_j$
  P: GELEEFT GROEPEN $G \in \{0, \dots, k\}$
  MET . $\lambda_i = \lambda_j$ ALLE $i, j \in G$
  . G MAXIMAAL ALS $j \notin G$, $i \in G$
  DAN DOET $\lambda_i = \lambda_j$ NIET
  Q OOK COMBINEER DIE GROEPEN
  EN HOU ALLEEN DE NODIGE
  ONGELYKHEDEN OVER
  DIE ONGELYKHEDEN BEPALEN EEN SIMPLEX
  DAT EEN FACET VAN P EN Q IS

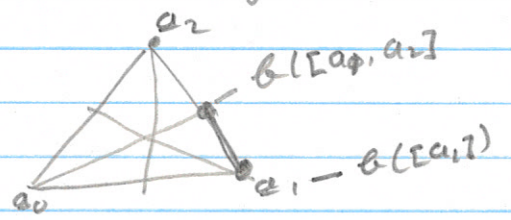
- STEL $P = [b(P_0), \dots, b(P_{k-1})]$ IS EEN $k-1$-SIMPLEX

1. $P_0 \neq S$

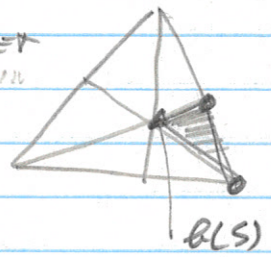
DAN IS P BEVAT IN P_0

EN IS EEN ZIJKANT VAN EEN k-SIMPLEX

NAMELIJK $[b(S), b(P_0), \dots, b(P_{k-1})]$



IS FACET VAN



2. $P_0 = S$ PERMUTATIE

$P_0 = [a_{i_0}, \dots, a_{i_k}]$

$P_1 = [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$

$\vdots$

a) $\lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j-1}}$: $P_{j-1} = [a_{i_{j-1}}, a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_k}]$

$P_j = [a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_k}]$

OF b) $\lambda_0 = 0$ $P_{k-1} = [a_{i_{k-1}}, a_{i_k}]$

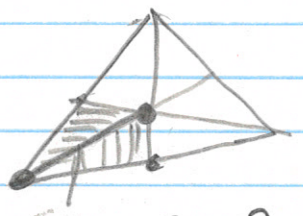
DAN IS P FACET VAN TWEE k-SIMPLICES

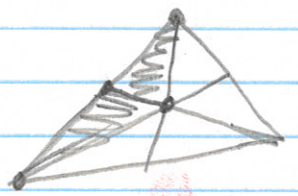
a) JE KUNT $[a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_k}]$ INVOEGEN

OF $[a_{i_{j-1}}, a_{i_{j+1}}, \dots, a_{i_k}]$

b) EINDIG MET $P_k = [a_{i_{k-1}}]$

OF $P_k = [a_{i_k}]$





$P_0 = S$ $P_1 = [a_0]$

$S, [a_1, a_0], [a_0]$

$S, [a_2, a_0], [a_0]$

$P_0 = S$ $P_1 = [a_0, a_2]$

$S, [a_0, a_2], [a_0]$

$S, [a_0, a_2], [a_2]$

MAAS WYDTE VAN DE BARYC. ONDERVERD.

ALS P EEN ELEMENT VAN DE BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING IS DAN GELDT

$$\text{DIAM } P \leq \frac{k}{k+1} \text{ DIAM } S$$

① ALS $x, y \in [a_0, \dots, a_k]$

DAN $\|x - y\| \leq \max_{i \leq k} \|a_i - y\|$

WANT

$$\|x - y\| = \|\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_k a_k - y\|$$
$$= \|\lambda_0 (a_0 - y) + \dots + \lambda_k (a_k - y)\|$$
$$\leq (\lambda_0 + \dots + \lambda_k) \max_{i \leq k} \|a_i - y\|$$

② NEEM EEN PERMUTATIE EN $l \leq m \leq k$ EN DE BARYCENTRA

$$b_1 = \frac{1}{l+1}(a_{i_0} + \dots + a_{i_l}) \text{ EN } b_2 = \frac{1}{m+1}(a_{i_0} + \dots + a_{i_l} + \dots + a_{i_m})$$

IN $[a_{i_0}, \dots, a_{i_m}]$: $\|b_1 - b_2\| \leq \max_{j \leq m} \|a_{i_j} - b_2\|$

NEEM EEN j

$$a_{i_j} - b_2 = a_{i_j} - \frac{1}{m+1}(a_{i_0} + \dots + a_{i_m})$$
$$= \frac{1}{m+1}\left((a_{i_j} - a_{i_0}) + (a_{i_j} - a_{i_j}) + \dots + (a_{i_j} - a_{i_m})\right)$$

DE j-DE TERM IS $a_{i_j} - a_{i_j} = 0$

DUS $\|a_{i_j} - b_2\| \leq \frac{m}{m+1} \max_{s \leq m} \|a_{i_j} - a_{i_s}\| \leq \frac{m}{m+1} \text{DIAM} S$

MAAR $\frac{m}{m+1} \leq \frac{k}{k+1}$

EN $\|b_1 - b_2\| \leq \frac{k}{k+1} \text{ DIAM } S$.

DIT WAS DE EERSTE BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING P_1

JE MAAKT NU TELKENS P_{m+1} UIT P_m DOOR ALLE BARYCENTRISCHE ONDERVERDELINGEN VAN DE ELEMENTEN VAN P_m BIJ ELKAAR TE NEMEN

GEVOLG:

DE MAASWYDTE VAN $\mathcal{P}_m$ IS DUS TEN HOOGSTE

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^m \cdot \text{DIAM } S$$

DUS $\lim_{m \to \infty}$ MAASWYDTE $\mathcal{P}_m = 0$.

HOE GEBRUIKEN

STEL $f: S \to S$ IS CONTINU

DEFINIEER

$$F_i = \{\underline{x} : \lambda_i(\underline{x}) \geq \lambda_i(f(\underline{x}))\}$$

- F_i IS GESLOTEN
- $a_i \in F_i$ WANT $\lambda_i(a_i) = 1 \geq \lambda_i(f(a_i))$
- $\underline{x} \in [a_i, a_j]$: – $\underline{x} = \lambda_i(\underline{x}) a_i + \lambda_j(\underline{x}) a_j$
  – $\lambda_i(\underline{x}) + \lambda_j(\underline{x}) = 1$
  – $\lambda_i(f(\underline{x})) + \lambda_j(f(\underline{x})) \leq 1$
  DUS $\lambda_i(x) \geq \lambda_i(f(x))$
  OF $\lambda_j(x) \geq \lambda_j(f(x))$

  CONCLUSIE $[a_i, a_j] \subseteq F_i \cup F_j$
- EVENZO $[a_{i_0}, \ldots, a_{i_\ell}] \subseteq F_{i_0} \cup \ldots \cup F_{i_\ell}$
- HIERUIT VOLGT [VOLGENDE KEER]

  VOOR ELKE m IS ER EEN $P_m \in \mathcal{P}_m$ ZÓ DAT $P_m \cap F_i \neq \emptyset$ VOOR ALLE i
- COMPACTHEID ER IS EEN $\underline{x}$ ZÓ DAT

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \ P_m \subseteq B(x, \varepsilon)$
- VOOR DIE x GELDT

  $$x \in \bigcap_{i=0}^{k} F_i$$

  EN DUS $\lambda_i(x) \geq \lambda_i(f(x))$ VOOR ALLE i

  MAAR DAN $\lambda_i(x) = \lambda_i(f(x))$ VOOR ALLE i

  $\therefore \ \underline{x} = f(\underline{x})$.