AM 3590 2021-09-21

① LEMMA VAN SPERNER

② VOOR $A \subseteq \mathbb{R}^n$ GELDT

$\dim A \leq n-1 \iff \operatorname{int} A = \emptyset$

BETER: $\dim A = n \iff \operatorname{int} A \neq \emptyset$

ZWAKKE VORM VAN:

ALS U EN V DELEN VAN $\mathbb{R}^n$

MET U EN V HOMEOMORF

EN U IS OPEN

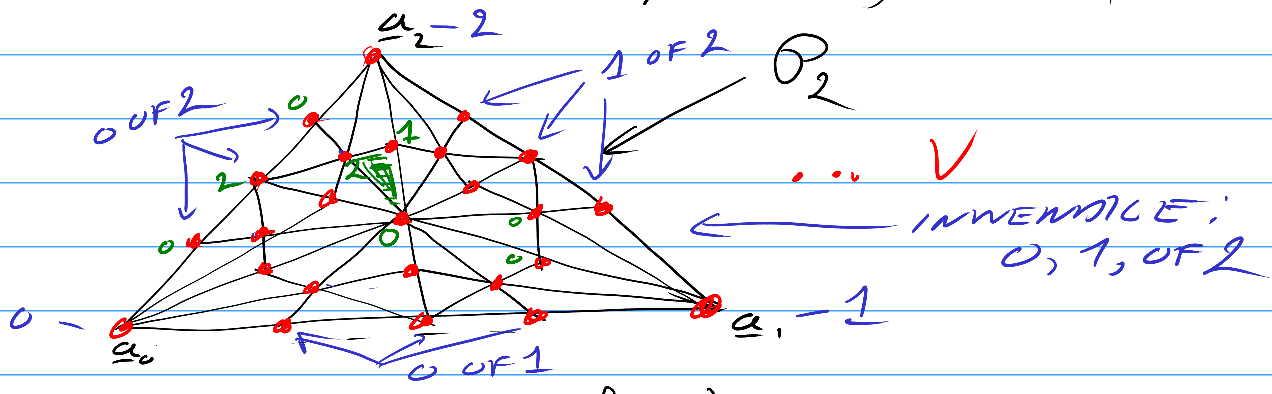
DAN MOET V OOK OPEN ZIJN.

① NEEM EEN k-SIMPLEX

$S = [\underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_k]$

NEEM EEN BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING: DE m-DE: $\mathcal{P}_m$

EN V IS DE VERZ VAN ALLE VERTICES (HOEKPUNTEN) IN $\mathcal{P}_m$



EEN FUNCTIE $h : V \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k\}$

IS EEN LABELING.

EEN <u>GOEDE</u> LABELINGEN IS ZO DAT: ALS $v \in [\underline{a}_{i_0}, \ldots, \underline{a}_{i_\ell}]$

DAN $h(v) \in \{i_0, \ldots, i_\ell\}$

- $h(a_i) = i$

We noemen $P \in \mathcal{P}_m$ een vol simplex als $h[P] = \{0, 1, \dots, k\}$

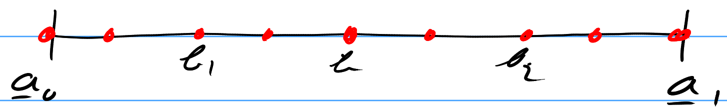
Stelling:

Als h goed is dan is er een oneven aantal volle k-simplices in $\mathcal{P}_m$.
IHB is er een vol k-simplex.

Bewijs: Inductie naar k

$k=0$: $[a_0]$ is het enige volle simplex: klaar

$k = 1$ $[0, 1]$



Hier ligt V mooi op een rijtje

$$\{a_0, a_1\} \cup \underset{1}{\{b[a_0,a_1]\}} \cup \underset{2}{\{b_1, b_2\}} \cup \underset{3}{\{\times,\times,\times,\times\}}$$

$$2 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} = 2^m + 1 \text{ punten}$$

$$p_0 < p_1 < \dots < p_{2^m}$$

- $h(p_0) = h(a_0) = 0$
- $h(p_{2^m}) = h(a_1) = 1$
- $h(p_{2^m}) - h(p_0) = 1$
- $h(p_{2^m}) - h(p_0) = \sum_{i=1}^{2^m} h(p_i) - h(p_{i-1})$

Bijv
$$\begin{aligned} h(a_1) - h(a_0) = {} & h(b_1) - h(a_0) \\ & + h(b) - h(b_1) \\ & + h(b_2) - h(b) \\ & + h(a_1) - h(b_2) \end{aligned}$$

Als $[p_{i-1}, p_i]$ vol is dan geldt $h(p_i) - h(p_{i-1}) = 1 - 0 = 1$
of $0 - 1 = -1$

DE SOM IS GELYK AAN 1
ELK NIET-VOL SIMPLEX DRAAGT 0 BY
1 − 1 OF 0 − 0
DE VOLLE SIMPLICES DRAGEN 1
OF −1 BY
HET RESULTAAT IS GELYK AAN 1
HET AANTAL 1-EN IS EEN
MEER DAN HET AANTAL −1-EN.
IN TOTAAL GEEFT DAT
EEN ONEVEN AANTAL
1-EN EN −1-EN
BY ELKAAR
DUS EEN ONEVEN AANTAL
VOLLE SIMPLICES.

$k \to k+1$ $\quad S = [a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}]$

P_m BEPAALT DE m-DE ONDER-
VERDELING VAN $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$
EN h BEPERKT TOT W IS GOED
EN $W = V \cap [a_0, \ldots, a_k]$
$g : W \longrightarrow \{0, \ldots, k\}$
DUS g IS h BEPERKT TOT W

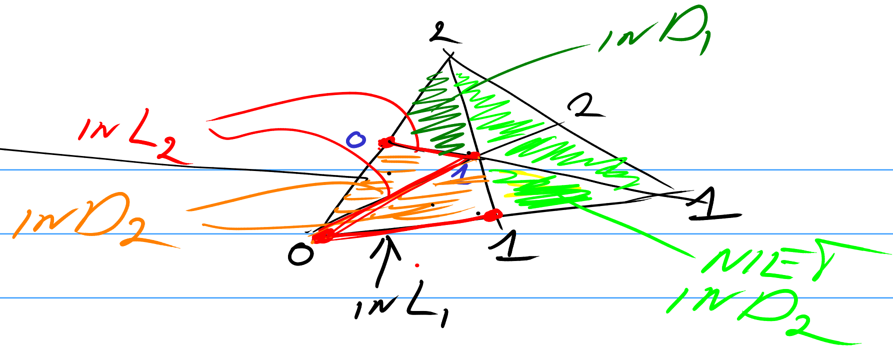
IND. VER. VOOR g IS ER EEN
ONEVEN AANTAL SIMPLICES P
MET $g[P] = \{0, \ldots, k\}$

L_1 DE VOLLE SIMPLICES VOOR g

L_2 DE k-SIMPLICES IN P_m DIE
NIET IN $[a_0, \ldots, a_k]$ LIGGEN
EN WEL ALLE WAARDEN
IN $\{0, \ldots, k\}$ AANNEMEN

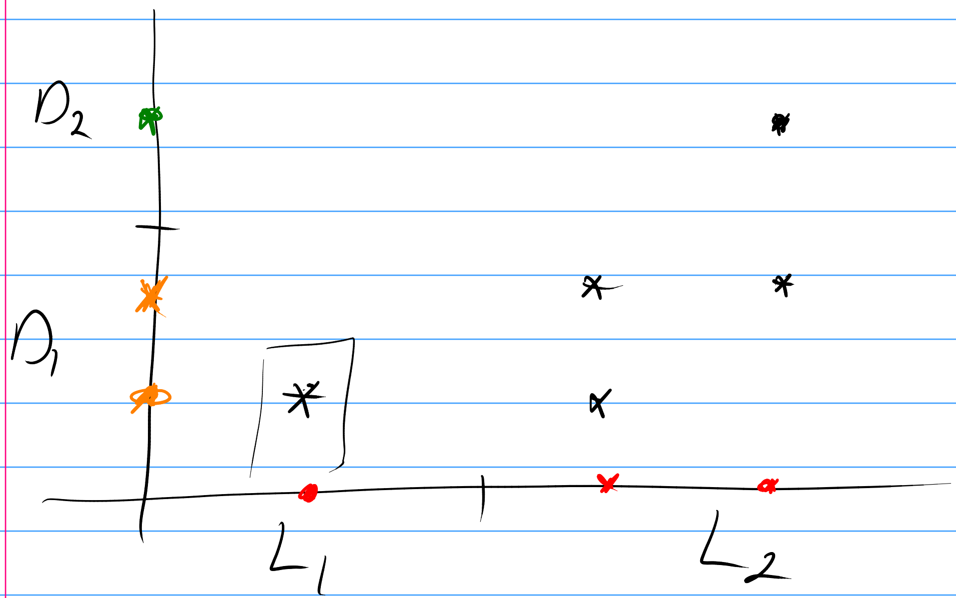
$\{a, b, c\}$
$\ \ 0 \ \ 0 \ \ 1$

$\{b, c\}$
$\{a, c\}$



D_1 : DE VOLLE SIMPLICES VOOR h

D_2 : DE $k+1$ - SIMPLICES IN P_m
DIE PRECIES DE WAARDEN
$\{0, \ldots, k\}$ AANNEMEN



$$(L_1 \cup L_2) \times (D_1 \cup D_2)$$

$(P, Q) \in R$ ALS
P ZIJKANT VAN Q IS

IN R ZIE IK 5 PAREN

$5 = |L_1| + 2|L_2|$

$5 = 2|D_1| + |D_2|$

CONCLUSIE $|L_1| + 2|L_2| = 2|D_1| + |D_2|$

IND VER: $|L_1|$ IS ONEVEN

DUS OOK $|D_2|$ IS ONEVEN

- $|L_1|$ IS ONEVEN
  ELKE p IN L_1 IS ZIJKANT VAN
  PRECIES ÉÉN $k+1$-SIMPLEX
  VOOR ZO'N SIMPLEX φ GELDT
  $h[\varphi] \supseteq \{0, \ldots, k\}$ $\quad h[p] = \{0, \ldots, k\}$
  $h[\varphi] = \{0, \ldots, k\}$ $\quad - \varphi \in D_2$
  OF $h[\varphi] = \{0, \ldots, k, k+1\}$ $- \varphi \in D_1$
  OOK IN HET ALGEMEEN
  DRAAGT p ÉÉN PAAR BIJ AAN R
- ALS $p \in L_2$ DAN IS p ZIJKANT
  VAN TWEE $k+1$-SIMPLICES
  OOK DIE ZITTEN IN $D_1 \cup D_2$
  DUS ELKE $p \in L_2$ DRAAGT
  TWEE PAREN BIJ AAN R

- $\varphi \in D_1$ DAN HEEFT φ ÉÉN
  ZIJKANT IN $L_1 \cup L_2$
  EN DRAAGT DUS ÉÉN PAAR BIJ
  AAN R
- $\varphi \in D_2$: DAN HEEFT φ TWEE
  ZIJKANTEN IN $L_1 \cup L_2$
  $k+2$ PUNTEN MET $k+1$ WAARDEN
  $\{0, \ldots, k\}$
  ÉÉN WAARDE KOMT TWEE KEER VOOR
  ELKE $\varphi \in D_2$ DRAAGT TWEE
  PAREN BIJ AAN R.

WE TELLEN R TWEE KEER

$|R| = |L_1| + 2|L_2|$

$|R| = |D_1| + 2|D_2|$

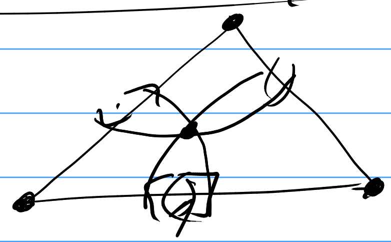
DUS $|L_1| + 2|L_2| = |D_1| + 2|D_2|$

I.V. $|L_i|$ ONEVEN
CONCLUSIE $|D_i|$ ONEVEN

$f : S \longrightarrow S$ CONTINU

$F_i = \{x : \lambda_i(x) \geq \lambda_i(f(x))\}$

- F_i GESLOTEN
- $a_i \in F_i$
- ALS $\{i_0, \dots, i_\ell\} \subseteq \{0, \dots, k\}$
  DAN $\underline{[a_{i_0}, \dots, a_{i_\ell}] \subseteq F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_\ell}}$



NEEM P_m
MAAK EEN
LABELING

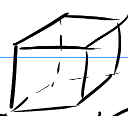
$$h : V \longrightarrow [0, \dots, k]$$

ZODAT $v \in F_{h(v)}$
EN ZORG DAT h EEN GOEDE
LABELING IS DAT KAN:
OMDAT $[a_{i_0}, \dots, a_{i_\ell}] \subseteq F_{i_0} \cup \dots \cup F_{i_\ell}$
SPERNER: ER IS EEN P
MET $h[P] = \{0, \dots, k\}$
<u>DUS</u> $P \cap F_i \neq \emptyset$ VOOR ELKE i
WANT P HEEFT EEN
HOEKPUNT IN F_i.

(2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

DIM $A = n \iff$ INT $A \neq \emptyset$

MAKKELYK:
INT $A \neq \emptyset \longrightarrow$ DIM $A \geq n$.
A BEVAT EEN KOPIE VAN $[0,1]^n$



DE PAREN ZIJKANTEN TONEN
AAN DAT DIM $A \geq n$.

LASTIGER $\dim A \leq n$.

[GELDT VOOR ALLE $A \subseteq \mathbb{R}^n$]

[ZELFS ALGEMEEN IN METRISCHE RUIMTEN $\dim A \leq \dim X$]

ALS $\operatorname{int} A = \emptyset$ DAN $\dim A \leq n-1$

① $\dim(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n) \leq n-1$

② ALS $\operatorname{int} A = \emptyset$ DAN IS ER EEN HOMEOMORFISME $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ZÓ DAT $h[A] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$.

DUS $\dim A \leq \dim(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n) \leq n-1$

③ BROUWER:

ALS D_1 EN D_2 AFTELBAAR EN DICHT ZIJN IN $\mathbb{R}^n$ DAN ER EN HOMEOMORFISME $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ MET $h[D_1] = D_2$

OPGAVE PROBEER DIT VOOR $\underline{n=1}$

[OOK BIJ LOGICA]