AM 3590 2021-10-05

TOPOLOGISCHE RUIMTEN

EEN TOP. RUIMTE IS EEN PAAR (X, τ) MET τ EEN <u>TOPOLOGIE</u> op X.

DWZ τ IS EEN FAMILIE DEELVERZ'N VAN X MET

- $\emptyset, X \in \tau$
- $O_1, O_2 \in \tau \longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$
- $\tau' \subseteq \tau \longrightarrow \bigcup \tau' \in \tau$

[LIJKT op MEASURABLE SPACE: $(S, \mathcal{S})$ $\mathcal{S}$ EEN σ-ALGEBRA]

DE ELEMENTEN VAN τ NOEMEN WE OPEN VERZAMELINGEN

"O IS OPEN" $\equiv$ "$O \in \tau$"

- (X, d) EEN METRISCHE RUIMTE

$\tau_d = \{ O : (\forall x \in O)(\exists r > 0)(B(x,r) \subseteq O) \}$

$\underbrace{(\forall x \in O)(\exists r > 0)(B(x,r) \subseteq O)}$ DEF VAN 'OPEN' IN METR. RUIMTE

τ_d <u>IS</u> EEN TOPOLOGIE

METEEN EEN HELEBOEL VOORBEELDEN:

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n, \ldots$ — GEWONE METRIEK

$[0,1], [0,1]^2, \ldots [0,1]^n$ — " —

ℓ_2

- $C([0,1], \mathbb{R})$ MET MAXNORM
- $C([0,1], \mathbb{R})$ MET L_2-NORM

METRISCH VERSCHILLEND

MAXNORM IS VOLLEDIG

L_2 IS DAT NIET

ZIJ DEZE TWEE TOCH NIET HOMEOMORF??

$\mathbb{P} \subseteq (0,1)$ EN $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

MET $d_1(x,y) = |x-y|$ MET d_2 ALS IN DE OPGAVEN.

ZIJN HOMEOMORF MAAR

d_1 IS NIET VOLLEDIG

d_2 IS WEL VOLLEDIG.

VOLLEDIGHEID HANGT DUS VAN MEER AF DAN ALLEEN DE OPEN VERZ'N.

- X WILLEKEURIG
  $\tau_i = \{\emptyset, X\}$
  INDISCRETE TOPOLOGIE

  $\emptyset$ $\qquad \bigcup \emptyset = \emptyset$

  $\{\emptyset\}$ $\qquad \bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$

  $\{X\}$ $\qquad \bigcup\{X\} = X$

  $\{\emptyset, X\}$ $\qquad \bigcup\{\emptyset, X\} = X$

- X WILLEKEURIG
  $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ ALLE DEELVERZ'N
  DISCRETE TOPOLOGIE ; HOORT BIJ DE DISCRETE METRIEK
  $(d(x,x) = 0 \quad d(x,y) = 1 \ (x \neq y))$

- X WILLEKEURIG — ONEINDIG. ($\mathbb{N}$)
  $\tau_{CE} = \{\emptyset\} \cup \{O : X \setminus O \text{ IS EINDIG}\}$

  - $\emptyset$, $X \setminus X = \emptyset$ IS EINDIG.
  - $O_1, O_2 \in \tau_{CE}$ CE: CO-EINDIG

    $O_1 \cap O_2 \in \tau_{CE}$!

    - $O_1 = \emptyset$ OF $O_2 = \emptyset$ JA: $O_1 \cap O_2 = \emptyset$
    - $O_1 \neq \emptyset$ EN $O_2 \neq \emptyset$

      $X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$
      IS EINDIG.

• $\tau' \subseteq \tau_{CE}$ --- $\bigcup\tau' \in \tau_{CE}$?

- $\tau' = \{\emptyset\}$ $\bigcup \tau' = \emptyset \in \tau_{CE}$
- ER IS EEN $O \in \tau'$ MET $O \neq \emptyset$
  DWZ $X \setminus O$ EINDIG.
  MAAR $\underbrace{X \setminus (\bigcup\tau')}_{\text{EINDIG.}} \subseteq X \setminus O$

• X WILLEKEURIG
$\tau_{CA} = \{\emptyset\} \cup \{O : X \setminus O \text{ IS AFTELBAAR}\}$
CO-AFTELBARE TOPOLOGIE.
[OPGAVE]

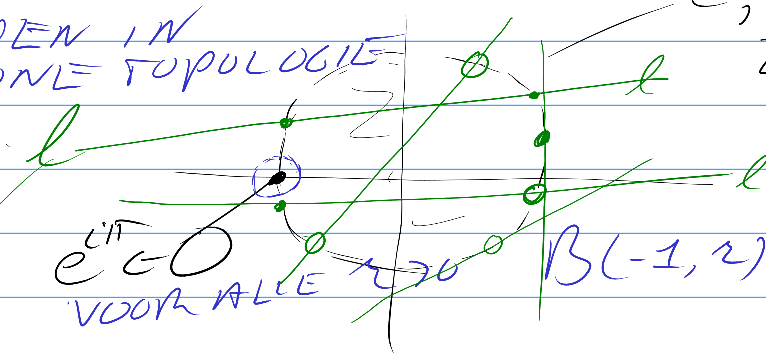
• $S = \{0,1\}$ $\tau = \{\emptyset, \{0\}, S\}$
SIERPIŃSKI-RUIMTE
[OPGAVE]

• $\mathbb{R}^2$ τ_R IS DE RADIALE TOPOLOGIE
$O \in \tau_R$ DESDA VOOR ELKE RECHTE LIJN ℓ IN $\mathbb{R}^2$ IS $O \cap \ell$ OPEN IN DE GEWONE TOPOLOGIE VAN ℓ ZELF.

$O = \mathbb{R}^2 \setminus \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{Q}\}$

$e^i, e^{i/2}, \dots e^{iq}$ $q \in \mathbb{Q}$ LAAT IK WEG

NIET OPEN IN GEWONE TOPOLOGIE



$e^{i\pi} \in O$ VOOR ALLE $r > 0$ $B(-1,r) \not\subseteq O$

DE DOORSNEDE $O \cap \ell$ IS
ℓ ZELF
ℓ MINUS EEN PUNT, OF
ℓ MINUS TWEE PUNTEN
EN DUS OPEN IN ℓ ZELF

- $\emptyset \cap \ell = \emptyset$, $\mathbb{R}^2 \cap \ell = \ell$
- $(O_1 \cap O_2) \cap \ell = \underbrace{\underbrace{(O_1 \cap \ell)}_{\text{open in } \ell} \cap \underbrace{(O_2 \cap \ell)}_{\text{open in } \ell}}_{\text{open in } \ell}$
- $(\bigcup \tau') \cap \ell = \bigcup \{ O \cap \ell : O \in \tau' \}$

- X WILLEKEURIG, ONEINDIG
  $x_0 \in X$ VAST
  $\tau = \{ O : O \subseteq X$ EN ALS $x_0 \in O$ DAN $X \setminus O$ IS EINDIG $\}$
  - ALS $x_0 \notin O$ DAN $O \in \tau$ "LOGICA"

- $\emptyset \in \tau$ ✓ $X \in \tau$ ✓
- $O_1 \cap O_2 \in \tau$ ZEKER ALS $x_0 \notin O_1 \cap O_2$
  OOK ALS $x_0 \in O_1 \cap O_2$
  DAN $X \setminus (O_1 \cap O_2) = (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2)$
  IS EINDIG.
- $\bigcup \tau' \in \tau$ ZEKER ALS $x_0 \notin \bigcup \tau'$
  ANDERS $X \setminus (\bigcup \tau') \subseteq X \setminus O$
  VOOR EEN $O \in \tau'$ MET $x_0 \in O$.

- ALS $O_1, \dots, O_n \in \tau$ DAN $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \tau$
  [OPGAVE INDUCTIE]
- IN ELK VAN DE VOORBEELDEN:
  MAAK EEN RIJ $\langle O_n \rangle_n$ IN τ
  MET $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \notin \tau$
  [OF BEWIJS DAT ZO'N RIJ ER NIET IS]

AFGELEIDE BEGRIPPEN.

- OPEN VERZAMELING = ELEMENT VAN τ
- GESLOTEN VERZAMELING = COMPLEMENT VAN EEN OPEN VERZ.

OPGAVE BESCHRIJF DE GESLOTEN VERZ'N IN ELK VOORBEELD

- $S \longrightarrow \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, S\}$
- INDISCREET $\mathcal{F}_i = \{\emptyset, X\}$
- DISCREET $\mathcal{F}_d = \mathcal{P}(X)$
- $\mathcal{F}_{CE} = \{X\} \cup \{F : F \text{ EINDIG}\}$
- RADIALE TOPOLOGIE:

  ELKE DEELVERZ VAN $\{z : |z| = 1\}$ IS GESLOTEN T.O.V. τ_R

- INWENDIGE A° OF $\operatorname{INT} A$

$$\bigcup \{O \in \tau : O \subseteq A\}$$

"DE GROOTSTE OPEN VERZ BINNEN A"

- AFSLUITING $\overline{A}$ OF $\operatorname{CL} A$

$$\bigcap \{F : F \text{ GESLOTEN}, A \subseteq F\}$$

"DE KLEINSTE GESLOTEN VERZ. OM A"

OPGAVE: $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$

$A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$

ALS A OPEN IS GELDT DAN $A = \operatorname{INT}(\operatorname{CL} A)$?

—"— GESLOTEN —"— $A = \operatorname{CL}(\operatorname{INT} A)$?

RAND ∂A OF $\mathrm{Ro}\,A$ OF $\mathrm{Fr}\,A$

OF $\mathrm{Bd}\,A$ OF $\mathrm{Bdry}\,A$

$\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

IN $\mathbb{R}$: $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

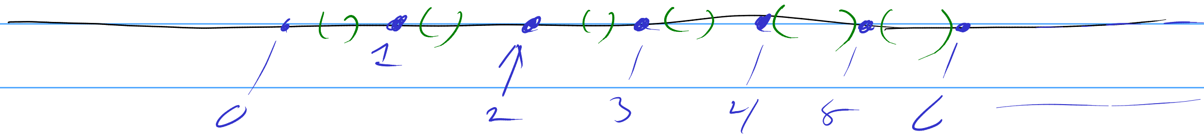
AFGELEIDE VERZAMELING A'

$x \in A'$ DESDA $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$

x IS VERDICHTINGSPUNT VAN A

IN $\mathbb{R}$ $\mathbb{N}' = \emptyset$

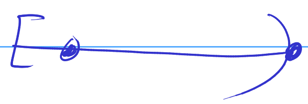
$[0,1)' = [0,1]$



$2 \notin \overline{\mathbb{N} \setminus \{2\}}$ WANT $\mathbb{N} \setminus \{2\}$ IS GESLOTEN

$\mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{2\}) = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,3) \cup \bigcup_{n \geq 3} (n, n+1)$

IDEM VOOR ALLE $i \in \mathbb{N}$



$1 \in \overline{[0,1)} = \overline{[0,1) \setminus \{1\}}$

- OMGEVING:

U IS OMGEVING VAN x BETEKENT

ER IS EEN $O \in \tau$ MET

$x \in O \subseteq U$

IN $\mathbb{R}$: $[0,1]$ IS EEN OMG. VAN $\frac{1}{\pi}$

WANT

$\frac{1}{\pi} \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{2}{\pi}\right) \subseteq [0,1]$

ANDERE BRONNEN

OMGEVING VAN x $\equiv$ OPEN VERZ. WAAR x IN ZIT

WIJ NOEMEN DAT <u>OPEN OMGEVING</u>

- DICHTE VERZAMELING:
  A IS DICHT IN (X, τ) ALS
  $$\overline{A} = X$$
  "DE ENIGE GESL VERZ OM A IS X"
  OFWEL: VOOR ELKE $O \in \tau$
  ALS $O \neq \emptyset$ DAN $O \cap A \neq \emptyset$.

EERSTE TOPOLOGISCHE EIGENSCHAP:
(X, τ) IS SEPARABEL ALS ER
EEN AFTELBARE DICHTE
DEELVERZAMELING IS

$\mathbb{R}$ MET τ_i, τ_d, τ_{CE}, τ_{CA}, GEWONE TOP
WELKE IS SEPARABEL?
GEEF EEN AFT. DICHTE DEELVERZ.