AM 3590 2021-10-05

DEF: TOPOLOGISCHE RUIMTE

EEN PAAR (X, τ) MET X EEN VERZAMELING EN τ EEN FAMILIE DEELVERZAMELINGEN VAN X, DIE VOLDOET AAN [τ IS EEN TOPOLOGIE]

- $\emptyset, X \in \tau$
- ALS $O_1, O_2 \in \tau$ DAN $O_1 \cap O_2 \in \tau$
- ALS $\tau' \subseteq \tau$ DAN $\bigcup \tau' \in \tau$

DE ELEMENTEN VAN τ ZIJN DE OPEN VERZAMELING

[DENK AAN MEETBARE RUIMTEN: (X, S) MET S EEN σ-ALGEBRA]

VOORBEELDEN

- (X, d) METRISCHE RUIMTE
  $O \in \tau_d$ DESDA $(\forall x \in O)(\exists r > 0)(B(x, r) \subseteq O)$
  DAN IS τ_d EEN TOPOLOGIE.
- STANDAARD VOORBEELDEN VAN METRISCHE RUIMTEN: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $[0,1]$, $[0,1]^m$, ℓ_2, $\mathbb{Q}$, ...
  TENZIJ ANDERS VERMELD MET HUN GEWONE TOPOLOGIE.
- X WILLEKEURIG
  - $\tau_i = \{\emptyset, X\}$ INDISCRETE TOPOLOGIE
  - $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ DISCRETE TOPOLOGIE (VAN DISCRETE METRIEK)
  - $\tau_{cE} = \{\emptyset\} \cup \{O : X \setminus O \text{ IS EINDIG}\}$
  - $\tau_{cA} = \{\emptyset\} \cup \{O : X \setminus O \text{ IS AFTELBAAR}\}$
- $S = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, S\}$
  SIERPIŃSKI RUIMTE
- $X = \mathbb{R}^2$ τ_R IS DE RADIALE TOPOLOGIE
  $O \in \tau_R$ DESDA VOOR ELKE LIJN ℓ IN HET VLAK IS $O \cap \ell$ IN DE GEWONE TOPOLOGIE VAN ℓ.

OPGAVE

BEWYS: IN EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE (X, τ) GELDT: ALS $n \in \mathbb{N}$ EN $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \tau$ DAN $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$

OPGAVE

GEEF IN ELK VOORBEELD EEN RY $\{O_m\}_m$ ELEMENTEN VAN τ MET $\bigcap_{m=1}^{\infty} O_m \notin \tau$ OF BEWYS DAT ZO'N RY ER NIET IS.

AFGELEIDE BEGRIPPEN

- OPEN VERZAMELING = ELEMENT VAN τ

- GESLOTEN VERZAMELING
  F IS GESLOTEN ALS $X \setminus O$ OPEN IS.
  $\mathcal{F}_\tau = \{F \subseteq X : F$ IS GESLOTEN$\}$

OPGAVE : BESCHRIJF $\mathcal{F}_\tau$ ALS
$\tau = \tau_i$, $\tau = \tau_d$, $\tau = \tau_{CE}$, $\tau = \tau_{CA}$
EN OOK IN SIERPIŃSKI'S RUIMTE

- INWENDIGE : A° OF $\operatorname{INT} A$
  $\bigcup \{O : O \in \tau$ EN $O \subseteq A\}$
  DE GROOTSTE OPEN VERZAMELING BINNEN A

- AFSLUITING : $\overline{A}$ OF $\operatorname{CL} A$
  $\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}_\tau$ EN $A \subseteq F\}$
  DE KLEINSTE GESLOTEN VERZAMELING OM A

OPGAVE
- $\overline{A} = X \setminus \operatorname{INT}(X \setminus A)$
- $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
- ALS A OPEN IS GELDT DAN $A = \operatorname{INT}(\operatorname{CL} A)$?
- ALS A GESLOTEN IS GELDT DAN $A = \operatorname{CL}(\operatorname{INT} A)$?

- RAND : ∂A OF $\operatorname{RD} A$ OF $\operatorname{FR} A$ ...
  $\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

- AFGELEIDE VERZAMELING A'
  $x \in A'$ DESDA $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$

OPGAVE

- $x \in \overline{A}$ DESDA VOOR ELKE $O \in \tau$ MET $x \in O$ GELDT $O \cap A \neq \emptyset$
- $x \in A'$ DESDA VOOR ELKE $O \in \tau$ MET $x \in O$ GELDT $O \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$
- $x \in \partial A$ DESDA VOOR ELKE $O \in \tau$ MET $x \in O$ GELDT $O \cap A \neq \emptyset$ EN $O \setminus A \neq \emptyset$

- OMGEVING

  U IS EEN OMGEVING VAN x
  ALS ER EEN $O \in \tau$ IS MET $x \in O \subseteq U$
  [OPEN OMGEVING: $O \in \tau$ MET $x \in O$]

- DICHTE VERZAMELING:

  A IS DICHT IN X ALS $\overline{A} = X$
  DESDA VOOR ELKE $O \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ GELDT $O \cap A \neq \emptyset$

- EERSTE TOPOLOGISCHE EIGENSCHAP:

  (X, τ) IS SEPARABEL ALS ER EEN AFTELBARE DICHTE DEELVERZAMELING IS.

OPGAVE

WERK IN $\mathbb{N}$ MET $\tau = \tau_{CE}$

LAAT $A = 2\mathbb{N}$, $B = \{0,1,2,3\}$, $C = \mathbb{N} \setminus B$

BEPAAL $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, A^\circ, B^\circ, C^\circ$

$A', B', C', \partial A, \partial B, \partial C$

IS A DICHT? IS B DICHT? IS C DICHT?

OPGAVE NEEM $X = \mathbb{R}$ WELKE TOPOLOGIEËN ZIJN SEPARABEL:

τ_i, τ_d, τ_{CE}, τ_{CA}, DE GEWONE TOPOLOGIE

GEEF TELKENS AAN WAAROM (NIET).