AM 3590 2021-10-08

• Basis voor een topologie

(X, τ) een ruimte
een **basis** is een deelfamilie $\mathcal{B}$ van τ
zó dat
voor elke $O \in \tau$ is er $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ met $\bigcup \mathcal{B}' = O$
of equivalent
voor elke $O \in \tau$ en voor elke $x \in O$
is er een $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B \subseteq O$.

Voorbeelden:
- (X, d) metrische ruimte
  - $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ is een basis voor τ_d
  - $\mathcal{C} = \{B(x, 2^{-n}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ is ook een basis.
- indiscrete topologie: $\mathcal{B} = \{X\}$
- discrete topologie $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$

Als $\mathcal{B} \subseteq \tau$ een basis is dan geldt:
a) $\bigcup \mathcal{B} = X$ [want $X \in \tau$]
b) als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en $x \in B_1 \cap B_2$
   dan is er $B_3 \in \mathcal{B}$ met $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Stelling
Als X een verz. is en $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$
voldoet aan a) en b) dan is er een
topologie op X waar $\mathcal{B}$ een basis voor is.

Voorbeeld
$\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}; a < b\}$
$\mathcal{B}$ voldoet aan a) en b) en bepaalt
een topologie op $\mathbb{R}$: de Sorgenfrey-topologie
We noteren de ruimte $\underline{\mathbb{S}}$

$(X,<)$ WILLEKEURIG, MET LINEAIRE ORDENING.
OPEN INTERVALLEN
$(a,b) = \{x : a < x < b\}$
$(a,\rightarrow) = \{x : a < x\}$
$(\leftarrow, b) = \{x : x < b\}$
$(\leftarrow,\rightarrow) = X$
DE FAMILIE $\mathcal{J}$ VAN OPEN INTERVALLEN
VOLDOET AAN a) EN b) EN BEPAALT
DUS EEN TOPOLOGIE OP X: DE ORDE-TOPOLOGIE.

VOORBEELD $[0,1]^2$
$(x,y) \triangleleft (u,v)$ ALS $x < u$ OF
$x = u$ EN $y < v$
LEXICOGRAPHISCH GEORDENDE VIERKANT $\underline{\mathbb{K}}$

- LOKALE BASIS
(X,τ) EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE
LAAT $x \in X$ EEN <u>LOKALE BASIS IN x</u>
IS EEN FAMILIE OPEN VERZAMELINGEN $\mathcal{B}_x$
MET: ALS $O \in \tau$ EN $x \in O$
DAN IS ER EEN $B \in \mathcal{B}_x$ ZÓ DAT $x \in B \subseteq O$
NB ZODAT $x \in B$ VOOR ALLE $B \in \mathcal{B}_x$

VOORBEELDEN
- METRISCHE RUIMTE: $\{B(x,r) : r > 0\}$ OF
$\{B(x,q) : q > 0;\ q \in \mathbb{Q}\}$ OF $\{B(x, 2^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ...
- $\mathbb{S}$ SORGENFREY LIJN:
$x \in \mathbb{S}$: $\mathcal{B}_x = \{[x, x+2^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$
IS EEN LOKALE BASIS IN x.

Eigenschappen:

Stel voor elke $x \in X$ is een lokale basis $\mathcal{B}_x$ in x vastgelegd/gekozen.

1) Elke $\mathcal{B}_x$ is niet leeg [er is een B met $x \in B \subseteq X$]
2) Als $B \in \mathcal{B}_x$ dan $x \in B$ [de rest gooien we weg]
3) Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ dan is er een $B_3 \in \mathcal{B}_x$ met $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ [$B_1 \cap B_2 \in \tau$]
4) Als $B \in \mathcal{B}_x$ en $y \in B$ dan is er een $C \in \mathcal{B}_y$ met $C \subseteq B$ [$B \in \tau$]

Stel X is een verzameling
voor elke $x \in X$ is $\mathcal{B}_x$ gekozen
zo dat aan 1), 2), 3), en 4) voldaan is

Definieer τ door
$U \in \tau$ desda $(\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B}_x)(B \subseteq U)$

- τ is een topologie
- elke $\mathcal{B}_x$ is een lokale basis voor τ in x

Voorbeeld Niemytzki-vlak

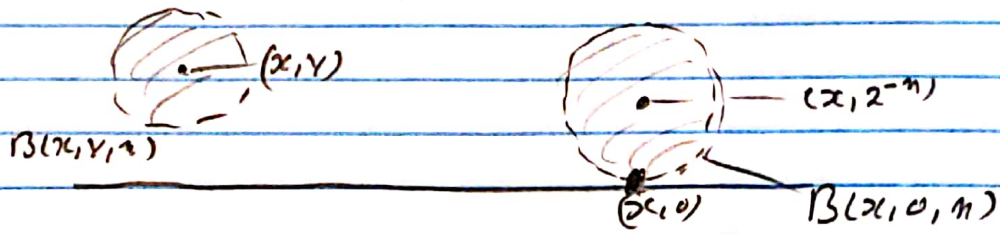
$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

Voor (x,y) met $y > 0$:

$B(x,y,n) = \{(u,v) : \|(u,v)-(x,y)\| < 2^{-n}\}$
gewone schijf in $\mathbb{R}^2$

Voor $(x,0)$:

$B(x,0,n) = \{(x,0)\} \cup \{(u,v) : \|(u,v)-(x,2^{-n})\| < 2^{-n}\}$



$\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x,y,n) : n \in \mathbb{N}\}$

DE TOEKENNING $(x,y) \mapsto \mathcal{B}_{(x,y)}$
VOLDOET AAN (1), 2), 3), EN 4))
EN BEPAALT DUS EEN TOPOLOGIE OP $\mathbb{N}$

! $\mathbb{S}$, $\mathbb{V}$, EN $\mathbb{N}$ ZIJN BELANGRIJKE
(TEGEN) VOORBEELDEN

- SUBBASIS

(X, τ) EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE
$\mathcal{S} \subseteq \tau$ IS EEN SUBBASIS VOOR τ
ALS $\mathcal{S}^\wedge$ EEN BASIS IS
$\mathcal{S}^\wedge = \{ \bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} ; \mathcal{S}' \text{ EINDIG} \}$

ELKE FAMILIE DEELVERZAMELINGEN KAN
ALS SUBBASIS VOOR EEN TOPOLOGIE DIENEN.
WANT $\mathcal{S}^\wedge$ VOLDOET AAN DE EISEN
VAN EEN BASIS $(X = \bigcap \emptyset)$

$\mathbb{R}$: $\{ (\leftarrow, q) : q \in \mathbb{Q} \} \cup \{ (p, \rightarrow) : p \in \mathbb{Q} \}$
IS EEN SUBBASIS VOOR DE GEWONE
TOPOLOGIE

$\mathbb{S}$ $\{ (\leftarrow, q) : q \in \mathbb{Q} \} \cup \{ [a, \rightarrow) : a \in \mathbb{R} \}$
IS EEN SUBBASIS VOOR $\mathbb{S}$

τ_{CE} $\{ X \setminus \{x\} : x \in X \}$ IS EEN SUBBASIS.