AM3590 2021-10-12

SUBBASIS VOOR EEN TOPOLOGIE

τ : ϕ, X ; $\bigcup$; $\bigcap_{i=1}^{n}$

$\mathcal{B}$: --- AF TE LEIDEN UIT DEF

BIJ BASIS IS AAN EIS b ZEKER VOLDAAN ALS : $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ VOOR ALLE $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

BIJ $\mathbb{S}$ HADDEN WE DAT BIJNA

$[a, b) \cap [c, d) = \phi$ OF

$[c, b)$ OF $[a, d)$

OF ---

EVENZO BIJ LINEAIRE ORDENINGEN

$\mathcal{S}$ IS EEN SUBBASIS VOOR τ ALS $\mathcal{S}^{\wedge}$ EEN BASIS VOOR τ IS.

$\mathcal{S}^{\wedge} = \{ \bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{S}' \text{ EINDIG} \}$

$\mathbb{R}$: $\{ (p, \infty) : p \in \mathbb{Q} \} \cup \{ (-\infty, q) : q \in \mathbb{Q} \}$

SUBBASIS VOOR DE GEWONE TOPOLOGIE

$\mathbb{S}$: $\{ [a, \infty) : a \in \mathbb{R} \} \cup \{ (-\infty, q) : q \in \mathbb{Q} \}$

SUBBASIS

IN BEIDE GEVALLEN IS

$\{ S_1 \cap S_2 : S_1, S_2 \in \mathcal{S} \}$

AL EEN BASIS.

STELLING:

$\mathcal{S}$ IS EEN SUBBASIS VOOR τ

DESDA

τ IS DE KLEINSTE TOPOLOGIE MET $\mathcal{S} \subseteq \tau$.

① ALS ϱ EEN TOP IS MET $\mathcal{S} \subseteq \varrho$
DAN OOK $\mathcal{S}^\wedge \subseteq \varrho$
EN OOK DE TOPOLOGIE VOORTGEBRACHT DOOR $\mathcal{S}^\wedge$

NB $\bigcap \emptyset = X$ DUS $X \in \mathcal{S}^\wedge$

$\bigcap \emptyset = \{ x \in X : (\forall S \in \emptyset)(x \in S) \}$

CONVERGENTIE

- (X, τ) EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE
- $(x_n)_n$ EEN RIJ IN X, EN $x \in X$
- DE RIJ CONVERGEERT NAAR x ALS VOOR ELKE $O \in \tau$ MET $x \in O$ IS ER EEN $N \in \mathbb{N}$ ZODAT $x_n \in O$ VOOR $n \geq N$.

VOOR DE TOPOLOGIE IS DIT NIET GENOEG.

a) STEL $(x_n)_n$ IS EEN RIJ IN $A \subseteq X$ DIE NAAR x CONVERGEERT
DAN $x \in \overline{A}$

b) $\mathbb{R}$ MET $\underline{\tau_{CA}}$ CO-AFT. TOPOLOGIE
- $0 \in \overline{(0,1)}$ (ZELFS $\overline{(0,1)} = \mathbb{R}$)
- ER IS <u>GEEN</u> RIJ IN $(0,1)$ DIE NAAR 0 CONVERGEERT

c) $\mathbb{N}$ MET τ_{CE}; NEEM $(n)_n$ IN $\mathbb{N}$
TOON AAN: DEZE RIJ CONVERGEERT NAAR <u>ELK</u> PUNT IN $\mathbb{N}$.

CONTINUÏTEIT

→ (X, τ_1) EN (Y, τ_2) TOPOLOGISCHE RUIMTEN
$f : X \longrightarrow Y$ EEN AFBEELDING.

- $x \in X$: WE ZEGGEN
  f IS CONTINU IN x
  ALS
  VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$
  EEN OMGEVING U VAN x BESTAAT
  ZÓ DAT $f[U] \subseteq V$.

  METRISCH:
  V OMG VAN $f(x)$: DAN IS ER $\varepsilon > 0$
  MET $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$
  ER IS EEN $\delta > 0$ ZÓ DAT
  $\forall y \, (d(y, x) < \delta \longrightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon)$
  HIER STAAT $f[B(x, \delta)] \subseteq B(f(x), \varepsilon)$
  MET $U = B(x, \delta)$
  DAN KRIJGEN WE $f[U] \subseteq V$.

METRISCH CONTINU $\Longrightarrow$ CONTINU

CONTINU $\Rightarrow$ METRISCH CONTINU:
$B(f(x), \varepsilon)$ IS EEN OMG. VAN $f(x)$
ER IS EEN OMG U VAN x MET
$f[U] \subseteq B(f(x), \varepsilon)$
NEEM $\delta > 0$ MET $B(x, \delta) \subseteq U$
DAN VOLDOET DEZE δ.

EQUIVALENTE UITSPRAKEN

- VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$
  IS $f^{-1}[V]$ EEN OMGEVING VAN x
  $\Rightarrow$: $U \subseteq f^{-1}[V]$ $\Leftarrow$: NEEM $U = f^{-1}[V]$
- VOOR ELKE <u>OPEN</u> OMGEVING V VAN $f(x)$
  IS ER EEN <u>OPEN</u> OMGEVING U VAN x
  MET $f[U] \subseteq V$

- ALS $\mathcal{B}$ EEN LOKALE BASIS IN x IS EN $\mathcal{C}$ EEN LOKALE BASIS IN $f(x)$ DAN $(\forall C \in \mathcal{C})(\exists B \in \mathcal{B})(f[B] \subseteq C)$

- ALS $x \in \overline{A}$ DAN $f(x) \in \overline{f[A]}$ VOOR ELKE $A \subseteq X$.

$\Rightarrow$ STEL $x \in \overline{A}$

NEEM $O \in \tau_2$ MET $f(x) \in O$

TB $O \cap f[A] \neq \emptyset$

ER IS EEN OPEN OMG. U VAN x MET $f[U] \subseteq O$

$x \in \overline{A}$ DUS $U \cap A \neq \emptyset$

NEEM $a \in U \cap A$

DAN $f(a) \in f[A]$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} f(a) \in f[A] \\ f(a) \in f[U] \subseteq O \end{matrix}\right\}$ $f(a) \in O \cap f[A]$

$\Leftarrow$ STEL V IS EEN OMG. VAN $\overline{f(x)}$

BEKIJK $f^{-1}[V]$ EN $A = X \setminus f^{-1}[V]$
$= f^{-1}[Y \setminus V]$

WE WETEN: $f[A] \subseteq Y \setminus V$

DUS $f(x) \notin \overline{f[A]}$

DAN VOLGT $x \notin \overline{A}$

NEEM $U = X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A \subseteq f^{-1}[V]$

- U IS OMG. VAN x WANT OPEN
- $f[U] \subseteq V$

EERSTE AFTELBAARHEIDSAXIOMA:

IN ELK PUNT IS ER EEN AFTELBARE LOKALE BASIS

HIER ZIJN RIJTJES VOLDOENDE

BIJV $x \in \overline{A}$ DESDA ER IS EEN RIJ IN A DIE NAAR x CONVERGEERT.

TWEEDE AFTELBAARHEIDSAXIOMA
ER IS EEN AFTELBARE BASIS
VOOR DE TOPOLOGIE
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, ... ℓ_2 ...
VOOR METRISCHE RUIMTEN GELDT
SEPARABEL $\Longleftrightarrow$ AFTELBARE BASIS.

OPGAVE ALS f CONTINU IS IN x
EN $(x_n)_n$ IS EEN RIJ DIE NAAR x
CONVERGEERT DAN CONVERGEERT
DE RIJ $(f(x_n))_n$ NAAR $f(x)$.

HET OMGEKEERDE GELDT ALS ER
IN x EEN AFT. LOKALE BASIS IS.

GLOBALE CONTINUITEIT
$f: X \to Y$ IS CONTINU OP X
ALS f CONTINU IS IN ELK PUNT VAN X.
EQUIVALENTEN
- VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}_2$ IS $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1$
"VOLLEDIG ORIGINEEL VAN ELKE
OPEN VERZ. IS OPEN"

$\Rightarrow$ STEL O IS OPEN (IN Y)
BEKIJK $f^{\leftarrow}[O]$ NEEM x DAARIN
DAN $f(x) \in O$ DUS O IS OMG. VAN $f(x)$
ER IS EEN OPEN OMG U_x VAN x
MET $f[U_x] \subseteq O$
OFWEL $U_x \subseteq f^{-1}[O]$
DOE DIT VOOR ELKE $x \in f^{-1}[O]$
DAN $f^{-1}[O] = \bigcup \{U_x : x \in f^{-1}[O]\}$
EN DAT IS OPEN.

$\Leftarrow$ LAAT $x \in X$ EN MERK OP DAT
AAN DE KARAKTERIZERING
MET OPEN OMGEVINGEN IS
VOLDAAN.

- VOOR ELKE GESLOTEN F IS HET VOLL. ORIG. $f^{-1}[F]$ GESLOTEN
- ALS $A \subseteq X$ DAN

$$f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$$

"ALS $x \in \overline{A}$ DAN $f(x) \in \overline{f[A]}$"

- ALS $\mathcal{B}$ EEN BASIS VOOR τ_2 IS DAN $f^{-1}[B] \in \tau_1$ VOOR ALLE $B \in \mathcal{B}$ VIA $f^{-1}[\bigcup \mathcal{B}'] = \bigcup\{\underbrace{f^{-1}[B]}_{\in \tau_1} : B \in \mathcal{B}'\} \in \tau_1$

- ALS $\mathcal{S}$ EEN SUBBASIS VOOR τ_2 IS DAN $f^{-1}[S] \in \tau_1$ VOOR ALLE $S \in \mathcal{S}$ VIA $f^{-1}[\bigcap \mathcal{S}'] = \bigcap\{\underbrace{f^{-1}[S]}_{\in \tau_1} : S \in \mathcal{S}'\} \in \tau_1$

BIJV $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ IS CONTINU DESDA VOOR ELKE $q \in \mathbb{Q}$ ZIJN $f^{-1}[(\leftarrow, q)]$ EN $f^{-1}[(q, \rightarrow)]$ OPEN [KOMT TERUG BIJ LEMMA VAN URYSOHN]

$\{X \setminus \{x\} : x \in X\}$ IS EEN SUBBASIS VOOR DE CO-EINDIGE TOPOLOGIE

$f : Z \longrightarrow (X, \tau_{CE})$ IS CONTINU DESDA $f^{-1}[\{x\}]$ IS GESLOTEN, VOOR ALLE x.

$f : X \rightarrow Y$ IS EEN <u>OPEN</u> AFBEELDING ALS VOOR ELKE $O \in \tau_1$ GELDT

$$f[O] \in \tau_2$$

"HET BEELD VAN ELKE OPEN VERZ. IS OPEN"

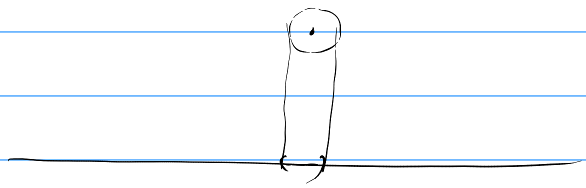
f IS <u>GESLOTEN</u> AFBEELDING
ALS $f[F]$ GESLOTEN IS IN Y
VOOR ELKE GESLOTEN F IN X.

$X=\mathbb{R}^2$ $Y=\mathbb{R}$ $f(x,y)=x$ CONTINU, OPEN,
NIET GESLOTEN

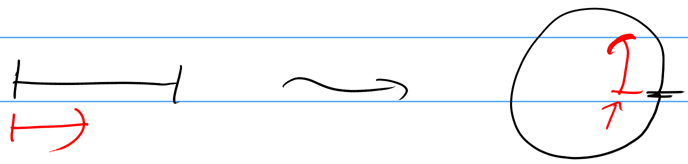
$F=\{(x,\frac{1}{x}) : x>0\}$

$f[F]=(0,\infty)$ NIET GESLOTEN IN $\mathbb{R}$

$f[\bigcup \mathcal{B}] = \bigcup\{f[B] : B\in\mathcal{B}\}$



$X=[0,1]$ $Y=S^1$ $f(x)=e^{2\pi i x}$



CONTINU
GESLOTEN
NIET OPEN

$X=\{0,1\}$ DISCREET
$Y=\{0,1\}$ INDISCREET
$f(x)=x$ CONTINU, NIET OPEN,
NIET GESLOTEN

$X=[0,1]^2$ $Y=[0,1]$ $f(x,y)=x$
CONTINU, OPEN, EN GESLOTEN

HOMEOMORFISME
CONTINU
BIJECTIE
INVERSE IS CONTINU