AM 3590 2021-10-15

Quotiëntafbeeldingen

(X, τ_1) en (Y, τ_2) topologische ruimten

- $\tau_f = \{ O \subseteq Y : f^{-1}[O] \in \tau_1 \}$ is een topologie
- f is continu desda $\tau_2 \subseteq \tau_f$

DEF: f is een <u>quotiëntafbeelding</u> als $\tau_2 = \tau_f$.

Als f continu en open is, of continu en gesloten, dan is f een quotiëntafbeelding

Waarom nuttig

① Continuïteit verifiëren

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Als q quotiënt is dan:
f is continu desda $f \circ q$ is continu

② Ruimten maken

- (X, τ) een topologische ruimte
- R een equivalentierelatie
- X/R is de verzameling equivalentieklassen
- $q : X \to X/R$ gedefinieerd door
  $q(x) =$ "de equivalentieklasse van x"
- de <u>quotiënttopologie</u> op X/R is
  de topologie τ_q
  en $(X/R, \tau_q)$ is de quotiëntruimte

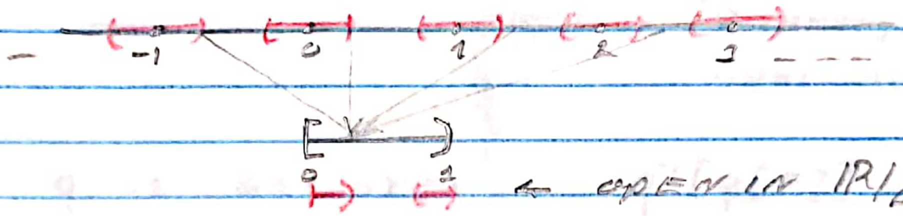
Voorbeeld: op $\mathbb{R}$ definieer

$x \equiv y$ als $x - y \in \mathbb{Z}$

- τ de gewone topologie
- $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{\equiv}$ (ook wel $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: algebra)
- Hoe ziet $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_q)$ er uit?

• De verzameling is eigenlijk $[0,1)$

want $x \equiv x - E(x)$



← open in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

want voll. orig. open in $\mathbb{R}$

Definieer $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ door

$[x] \mapsto \exp(2\pi i x)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr, "f \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & S^1 \\
& \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

← bijectie!

$(f \circ q)(x) = \exp(2\pi i x)$

• $f \circ q$ is continu dus f is continu

• $g = f \circ q$ is open: $q^{-1}[q[O]] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (O + n)$ is open

en $f^{-1} \circ g = q$ is continu

dus f^{-1} is continu.

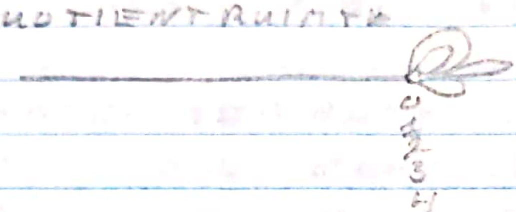
Conclusie $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \tau_q)$ is de eenh. cirkel!

OPGAVE: WAT IS DE QUOTIENTTOPOLOGIE op $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$?

- VOORBEELD op $\mathbb{R}$ MET GEWONE TOPOLOGIE

$x \sim y$ DESDA $x = y$ OF $x, y \in \mathbb{N}$
(DUS $\mathbb{N}$ WORDT ÉÉN PUNT)

QUOTIENTRUIMTE



"BLOEMETJE MET ONEINDIG VEEL BLADEREN"

q IS GESLOTEN! $\quad q^{-1}[q[F]] = \begin{cases} F & \text{ALS } \mathbb{N} \cap F = \emptyset \\ F \cup \mathbb{N} & \text{ALS } \mathbb{N} \cap F \neq \emptyset \end{cases}$

OPEN VERZAMELING OM PUNT $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{R}/\mathbb{N}$
$\Updownarrow$
OPEN VERZAMELING OM VERZ $\mathbb{N}$ IN $\mathbb{R}$

SCHEIDINGSEIGENSCHAPPEN

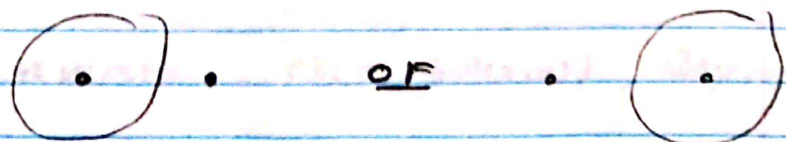
(X, τ) IS EEN

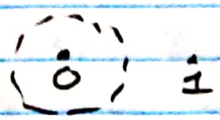
T_0 - RUIMTE ALS VOOR $x \neq y$ GELDT
$\{O \in \tau : x \in O\} \neq \{O \in \tau : y \in O\}$
DWZ $x \neq y \rightarrow (\exists O \in \tau)(|O \cap \{x, y\}| = 1)$

NIET: $\{0,1\}$ MET τ_i

WEL: ALLE ANDERE RUIMTEN, TOT NU TOE

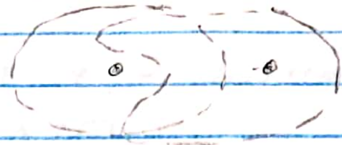
KARAKTERIZERING:
ALS $x \neq y$ DAN $x \notin \overline{\{y\}}$ OF $y \notin \overline{\{x\}}$

PLAATJE 

- SIERPIŃSKIRUIMTE 

- $\mathbb{R}$: $\tau_R = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$
$\tau_L = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

T_1 – RUIMTE ALS VOOR $x \neq y$ OPEN VERZ'N
O_x EN O_y BESTAAN MET
$x \in O_x \not\ni y$ EN $y \in O_y \not\ni x$

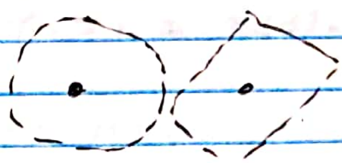


τ_{CE} IS EEN T_1-TOPOLOGIE
ALS $x \neq y$ NEEM $O_x = ...$ EN $O_y = ...$

KARAKTERISERINGEN
① VOOR ELKE x IS $\{x\}$ GESLOTEN
② VOOR ELKE x GELDT $\{x\} = \bigcap\{O \in \tau : x \in O\}$

NIET T_1 : SIERPIŃSKI, $(\mathbb{R}, \tau_R)$, $(\mathbb{R}, \tau_L)$
WEL T_1 : DE REST TOT NU TOE
METRISCHE RUIMTE:
$O_x = B(x, d(x,y))$
$O_y = B(y, d(x,y))$

T_0 EN T_1 MAKEN ONDERSCHEID
T_2 SCHEIDT PUNTEN
T_2 – RUIMTE OF <u>HAUSDORFFRUIMTE</u>
ALS VOOR $x \neq y$ OPEN VERZ'N O_x EN O_y
BESTAAN MET $x \in O_x$, $y \in O_y$ EN $O_x \cap O_y = \emptyset$.



METRISCHE RUIMTE $B(x, \frac{1}{2}d(x,y))$, $B(y, \frac{1}{2}d(x,y))$

NIET T_2 : $(\mathbb{N}, \tau_{CE})$, $(\mathbb{R}, \tau_{CA})$
WEL T_2 : $\mathbb{S}$, $\mathbb{V}$, $\mathbb{N}$, ... DE REST.

STELLING (X, τ) IS HAUSDORFF DESDA
VOOR ELKE x GELDT
$\{x\} = \bigcap \{ cl\, O : O \in \tau,\ x \in O \}$

IN EEN T_2-RUIMTE ZIJN LIMIETEN VAN RIJEN UNIEK.
OPGAVE: IN $(\mathbb{N}, \tau_{cof})$ DUS NIET

STELLING
STEL $f, g : X \to Y$ ZIJN CONTINU
EN Y IS HAUSDORFF
DAN IS $G = \{x : f(x) = g(x)\}$ GESLOTEN

GEVOLG
ALS $\{x : f(x) = g(x)\}$ DICHT IS DAN $f = g$.

BIJVOORBEELD IN DE ANALYSE:
ALS $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINU ZIJN
EN $f(q) = g(q)$ VOOR $q \in \mathbb{Q}$
DAN GELDT $f = g$.

OPGAVE [CAUCHY]
STEL $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ IS CONTINU EN VOLDOET
AAN $f(x+y) = f(x) + f(y)$
DAN GELDT $f(x) = f(1) \cdot x$ VOOR ALLE x

OOK CAUCHY WAT KRIJG JE ALS
- $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
- $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$