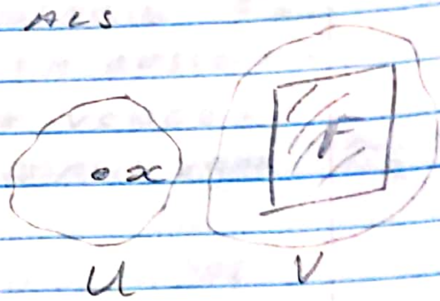
AM 3590 2021-10-19

WE HEBBEN T_0, T_1, EN T_2

(X,τ) IS EEN T_3-RUIMTE ALS
VOOR ELKE GESLOTEN
VERZAMELING F IN X
EN ELK PUNT $x \in X \setminus F$
DISJUNCTE OPEN VERZ'N
U EN V BESTAAN
MET $x \in U$ EN $F \subseteq V$.



(X,τ) IS <u>REGULIER</u> ALS DEZE T_3 ÉN T_0 IS.

- τ_i IS ALTIJD EEN T_3-TOPOLOGIE [FLAUW, MAAR TOCH]
- METRISCHE RUIMTEN ZIJN REGULIER
  - NEEM $\varepsilon > 0$ MET $B(x, 3\varepsilon) \cap F = \emptyset$
  - NEEM DAN $U = B(x,\varepsilon)$ EN $V = \{y : d(x,y) > 2\varepsilon\}$
- $\mathbb{S}$ IS REGULIER
  - NEEM $\varepsilon > 0$ MET $[x, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset$
  - NEEM DAN $U = [x, x+\varepsilon)$ EN $V = \mathbb{S} \setminus [x, x+\varepsilon)$
- $\mathbb{N}$ IS REGULIER [OPGAVE]
- $\mathbb{V}$ IS REGULIER [OPGAVE]

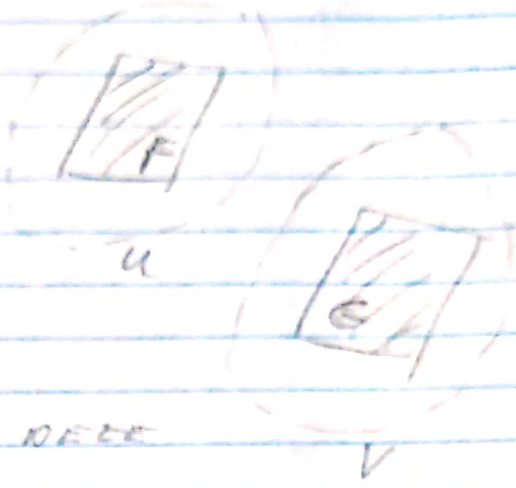
STELLING: REGULIER IMPLICEERT HAUSDORFF
ALS $x \neq y$ DAN $x \notin \overline{\{y\}}$ OF $y \in \overline{\{x\}}$
PAS T_3 TOE: ER ZIJN U EN V DISJUNCT EN OPEN
MET $x \in U$ EN $\overline{\{y\}} \subseteq V$ ($y \in V$ EN $\overline{\{x\}} \subseteq U$)
HEB DAN OOK $x \in U$, $y \in V$, EN $U \cap V = \emptyset$.

KARAKTERIZERINGEN
(a) ALS $x \in U$ EN $U \in \tau$
DAN IS ER EEN $V \in \tau$ MET $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$
(b) ALS F GESLOTEN IS DAN
$F = \bigcap \{\overline{U} : U \in \tau \text{ EN } F \subseteq U\}$

Voorbeelden

- Neem $\mathbb{R}$ met de gewone topologie τ
  maak een grotere topologie τ_a
  $C = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ als extra gesloten
  verzameling toe te voegen
  dus $\{\mathbb{R}\setminus C\} \cup \tau$ is een subbasis voor τ_a
  of locale bases:
  in $x \neq 0$: $\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$
  in 0: $\{(-\varepsilon, \varepsilon)\setminus C : \varepsilon > 0\}$
  - τ_a is Hausdorff want τ is dat al
  - $x \in \mathbb{R}\setminus C \in \tau_a$
    maar $\overline{(-\varepsilon, \varepsilon)\setminus C} = [-\varepsilon, \varepsilon]$ ook in τ_a
    en $[-\varepsilon, \varepsilon] \not\subset \mathbb{R}\setminus C$.
- Neem: $\mathbb{R}$ met gewone topologie τ
  maak τ_a met $\tau \cup \{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ als subbasis
  · τ_a is Hausdorff maar niet regulier
  [opgave]
- Radiale topologie τ_R op $\mathbb{R}^2$
  - deze is Hausdorff
    want groter dan de gewone topologie
  - deze is niet regulier
    het bewijs is niet-triviaal

(X,τ) is een T_4-ruimte als voor elk tweetal disjuncte gesloten verzamelingen F en G disjuncte open verzamelingen U en V zijn met $F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.



(X,τ) is normaal als deze T_4 én T_1 is

Opgave Normaal impliceert regulier

Karakterizeringen

(a) Tussen elk tweetal disjuncte gesloten verzamelingen bestaat een partitie

(b) Voor elke gesloten verz. F en elke open verz. U met $F \subseteq U$ bestaat een open verz V met $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(c) Als U en V open zijn met $U \cup V = X$ dan zijn er gesloten verz'n F en G zodat $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ en $F \cup G = X$.

(d) Als F en G gesloten en disjunct zijn dan zijn er open verz'n U en V zodat $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ en $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

(e) Als U en V open zijn met $U \cup V = X$ dan zijn er open verz'n O_u en O_v zodat $\overline{O_u} \subseteq U$, $\overline{O_v} \subseteq V$, en $O_u \cup O_v = X$.

VOORBEELDEN

- METRISCHE RUIMTEN ZIJN NORMAAL
  GEGEVEN F EN G LAAT
  $U = \{x : d(x,F) < d(x,G)\}$ EN
  $V = \{x : d(x,F) > d(x,G)\}$.
- DE RUIMTE $\mathbb{S}$ IS NORMAAL
  WERKEN MET LOKALE BASIS
  LAAT F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN
  VOOR $x \in F$ STEL $\varepsilon_x = \sup\{0 < \varepsilon \leq 1 : [x, x+\varepsilon) \cap G = \emptyset\}$
  VOOR $x \in G$ STEL $\varepsilon_x = \sup\{0 < \varepsilon \leq 1 : [x, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset\}$
  - ALS $x \in F$ EN $y \in G$ DAN $[x, x+\varepsilon_x) \cap [y, y+\varepsilon_y) = \emptyset$
  - DUS $\underbrace{\left(\bigcup\{[x, x+\varepsilon) : x \in F\}\right)}_{U} \cap \underbrace{\left(\bigcup\{[y, y+\varepsilon_y) : y \in G\}\right)}_{V} = \emptyset$
- DE RUIMTE $\mathbb{W}$ IS NORMAAL
  ALGEMEEN: LINEAIR GEORDENDE RUIMTEN ZIJN NORMAAL.
  DIT KOST ENIGE MOEITE
- N, HET NIEMYTZKI-VLAK IS NIET NORMAAL
  $P = \{(x,0) : x \notin \mathbb{Q}\}$ $\quad$ $\mathbb{Q} = \{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\}$
  ZIJN GESLOTEN EN DISJUNCT
  MAAR: ALS U EN V OPEN ZIJN MET
  $P \subseteq U$ EN $\mathbb{Q} \subseteq V$ DAN GELDT $U \cap V \neq \emptyset$.
  BEWIJS: NIET-TRIVIAAL KOMT NOG.

STELLING

ALS X EEN T_4-RUIMTE IS EN $f : X \to Y$ CONTINU, SURJECTIEF, EN GESLOTEN
DAN IS Y EEN T_4-RUIMTE.

VIA ⓒ STEL $Y = U \cup V$ MET U EN V OPEN
- DUS $X = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$
  EN ZIJN F EN G GESLOTEN ZÓ DAT
  $F \subseteq f^{-1}[U]$, $G \subseteq f^{-1}[V]$ EN $F \cup G = X$

DAN $\underbrace{f[F]}_{\text{GESL.}} \subseteq U$, $\underbrace{f[G]}_{\text{GESL.}} \subseteq V$ EN $\underbrace{f[F] \cup f[G] = Y}_{\text{SURJ.}}$

DUS $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ IS NORMAAL.

HOE BEWIJZEN WE DAT

- $(\mathbb{R}^2, \tau_p)$ NIET REGULIER IS?
- $\mathbb{N}$ NIET NORMAAL IS!

DE CATEGORIESTELLING VAN BAIRE

- $F \subseteq X$ HEET <u>NERGENS DICHT</u>
  ALS $\text{INT CL } F = \emptyset$
  MET ANDERE WOORDEN ALS U NIET-LEEG EN OPEN IS DAN IS ER EEN NIET-LEGE EN OPEN V MET $V \subseteq U \setminus F$ (NAMELIJK $U \setminus \overline{F}$)

DE STELLING: ALS $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ EEN RIJ NERGENS DICHTE VERZAMELINGEN IS IN EEN VOLLEDIGE METRISCHE RUIMTE (X,d) DAN IS $X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ <u>DICHT</u> IN X.

VAAK OMGEKEERD GEBRUIKT.
STEL $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ IS EEN RIJ VERZAMELINGEN ZÓ DAT $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ DAN IS TENMINSTE ÉÉN A_n <u>NIET</u> NERGENS DICHT
DUS $\text{INT CL } A_n \neq \emptyset$ VOOR EEN $n \in \mathbb{N}$.