(1)

AM 3590 2021-10-26

(1) LEMMA VAN URYSOHN

T_4-RUIMTEN HEBBEN VEEL CONTINUE FUNCTIE VAN X NAAR $\mathbb{R}$

CONTRAST: ER ZIJN REGULIERE RUIMTEN MET <u>ALLEEN</u> CONSTANTE CONTINUE FUNCTIES NAAR $\mathbb{R}$.

(2) T_3 + AFT. BASIS $\Longrightarrow$ T_4

(3) REGULIER + AFT BASIS $\Longrightarrow$ METRISCH

(4) STELLING VAN TIETZE-URYSOHN

IN T_4-RUIMTEN

ALS $F \subseteq X$ GESLOTEN IS

EN $f: F \longrightarrow \mathbb{R}$ IS CONTINU

DAN IS ER EEN CONTINUE UITBREIDING $g: X \to \mathbb{R}$ VAN f

$(g(x) = f(x),\ x \in F)$

(1) LEMMA VAN URYSOHN

(X, τ) IS T_4 DESDA

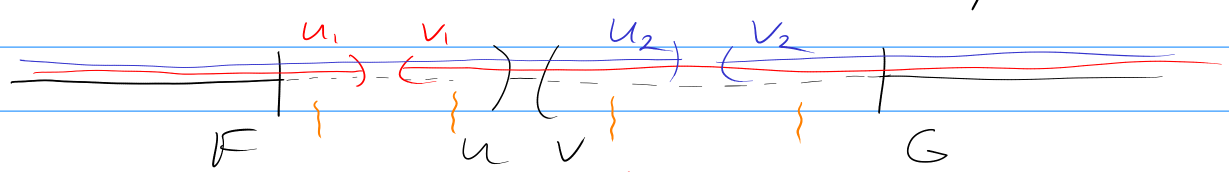
VOOR ELK TWEETAL DISJUNCTE GESLOTEN VERZ'N F EN G EEN CONTINUE FUNCTIE $f: X \to \mathbb{R}$ BESTAAT MET

$$f(x) = 0 \quad x \in F$$
$$f(x) = 1 \quad x \in G.$$

BEWIJS

$\Longleftarrow$ NEEM $U = f^{-1}[(-\infty, \tfrac{1}{2})]$ EN $V = f^{-1}[(\tfrac{1}{2}, \infty)]$.

$\Longrightarrow$ HOE BOUWEN WE ZO'N f?



HIERHAAL DIT VOOR F EN $X \setminus U$

HIERHAAL DIT VOOR $X \setminus V$ EN G

DIT IDEE GEEFT ONS EEN FAMILIE OPEN VERZ'N $\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$

MET
- $F \subseteq U_0$
- $U_1 \cap G = \emptyset \qquad (U_1 = X \setminus G)$
- ALS $p < q$ DAN $\overline{U_p} \subseteq U_q$

HOE?

NUMMER $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ALS $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

VOOR HET GEMAK $q_0 = 0$, $q_1 = 1$

GEBRUIK T_4 ER IS EEN OPENVERZ U_0:

MET $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 =$

VOLGENDE STAP NEEM U_{q_2}

MET $\overline{U_{q_0}} \subseteq U_{q_2} \subseteq \overline{U_{q_2}} \subseteq U_{q_1}$

ALS $q_0 < q_3 < q_2$

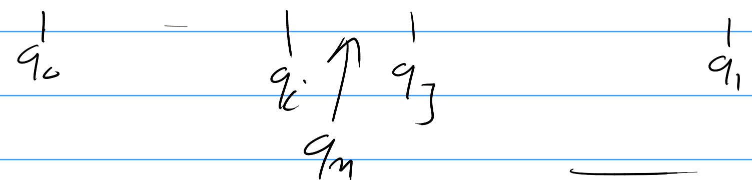
NEEM U_{q_3} MET $\overline{U_{q_0}} \subseteq U_{q_3} \subseteq \overline{U_{q_3}} \subseteq U_{q_2}$

ANDERS $q_2 < q_3 < q_1$ $\qquad U_{q_2} \subseteq U_{q_3} \subseteq \overline{U_{q_3}} \subseteq U_{q_1}$

ALGEMEEN:

GEGEVEN U_{q_i} VOOR $i < n$

BEKYK WAAR q_n LIGT TOV $\{q_0, q_1, \dots, q_{n-1}\}$



NEEM U_{q_n} MET $\overline{U_{q_i}} \subseteq U_{q_n} \subseteq \overline{U_{q_n}} \subseteq U_{q_j}$

DUS MET RECURSIE MAKEN WE ZO $\{U_{q_n} : n \in \mathbb{N}\} = \{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$

DEFINIEER $f : X \longrightarrow [0,1]$

DOOR
- $x \notin U_1$: $f(x) = 1$
- $x \in U_1$: $f(x) = \inf\{q : x \in U_q\}$

WAAROM CONTINU?

VOLDOENDE: $f^{-1}[[0,r)]$ is open
$f^{-1}[(r,1]]$ is open $r \in (0,1)$

(a) $x \in f^{-1}[[0,r)]$ DESDA $f(x) < r$
DESDA $(\exists q)(q < r \wedge x \in U_q)$
DESDA $x \in \bigcup_{q<r} U_q$ ⟵ DIE IS OPEN!

(b) $x \in f^{-1}[(r,1]]$ DESDA $f(x) > r$
DESDA $(\exists q)(q \in \mathbb{Q} \wedge f(x) > q > r)$
DESDA $(\exists q)(\exists p)(p,q \in \mathbb{Q} \wedge f(x) > p > q > r)$
DESDA $(\exists q)(\exists p)(p,q \in \mathbb{Q} \wedge x \notin U_p \wedge p > q > r)$
DESDA $(\exists q)(q > r \wedge x \notin \overline{U_q})$
DESDA $x \in \bigcup_{q>r} (X \setminus \overline{U_q})$ ⟵ OPEN!

□

KELLEY, GENERAL TOPOLOGY

* This nomenclature is an excellent example of the time-honored custom of referring to a problem we cannot handle as abnormal, irregular, improper, degenerate, inadmissible, and otherwise undesirable. A brief discussion of the abnormalities of the class of normal spaces occurs in the problems at the end of the chapter.

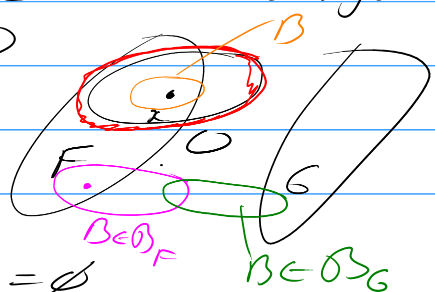
PAG 112

DEELRUIMTEN EN PRODUCTEN VAN NORMALE RUIMTEN HOEVEN NIET NORMAAL.
VOOR T_0, T_1, T_2, T_3 GAAT DIT WEL GOED

(2) T_3 + AFT BASIS $\Rightarrow T_4$
BEWIJS LIJKT OP DE BEWIJZEN VAN $\dim \mathbb{P} = 0$, $\dim \mathbb{Q} = 0$

BEWIJS:
(X, τ) is EEN T_3-RUIMTE
$\mathcal{B}$ IS EEN AFT BASIS

LAAT F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN
$x \in F$: ER IS EEN OPEN O
MET $x \in O$ EN $\overline{O} \cap G = \emptyset$
ER IS EEN $B \in \mathcal{B}$
MET $x \in B \subseteq O$
DAN OOK $\overline{B} \cap G = \emptyset$



NEEM $\mathcal{B}_F = \{B \in \mathcal{B} : B \cap F \neq \emptyset,\ \overline{B} \cap G = \emptyset\}$

WE ZIEN $F \subseteq \bigcup \mathcal{B}_F$

IDEM $\mathcal{B}_G = \{B \in \mathcal{B} : B \cap G \neq \emptyset,\ \overline{B} \cap F = \emptyset\}$

OOK $G \subseteq \bigcup \mathcal{B}_G$.

IETS TE OPTIMISTISCH $\bigcup \mathcal{B}_F \cap \bigcup \mathcal{B}_G = \emptyset$

WE NUMMEREN $\mathcal{B}_F : \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$

EN $\mathcal{B}_G : \{C_m : m \in \mathbb{N}\}$

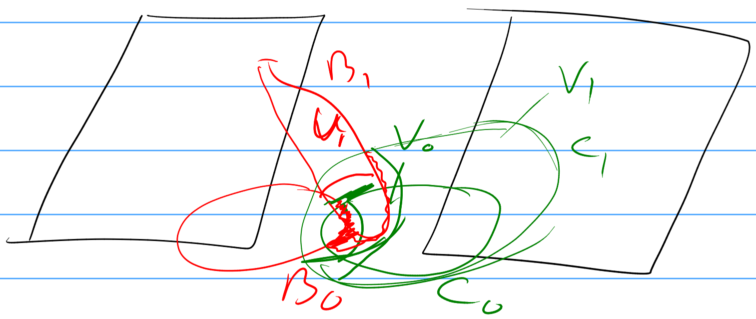
$U_0 = B_0$ $\qquad V_0 = C_0 \setminus \overline{B_0}$

$U_1 = B_1 \setminus \overline{C_0}$ $\qquad V_1 = C_1 \setminus (\overline{B_0} \cup \overline{B_1})$

$\vdots$

$U_n = B_n \setminus \underbrace{\bigcup_{i \leq n} \overline{C_i}}_{\text{EINDIG VEEL}}$ $\qquad V_n = C_n \setminus \underbrace{\bigcup_{i \leq n} \overline{B_i}}_{\text{EINDIG VEEL}}$

$\vdots$ $\qquad \vdots$



$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ $\qquad V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$

$F \subseteq U$: $\qquad$ IDEM $G \subseteq V$

ALS $x \in F$ DAN $x \in B_n$ VOOR EEN n

MAAR $x \notin \bigcup_{i \leq n} \overline{C_i}$ DUS $x \in U_n$

NU $U \cap V = \emptyset$:

BIJV $U_n \cap V_m = \emptyset$ VOOR ALLE n, m

$n \leq m$ $\qquad V_m \cap U_n \subseteq V_m \cap \overline{B_n} = \emptyset$

$n > m$ $\qquad U_n \cap V_m \subseteq U_n \cap \overline{C_m} = \emptyset$

ELKE U_n EN ELKE V_n IS OPEN

DUS U EN V OOK OPEN.

3. ELKE REGULIERE RUIMTE MET EEN AFTELBARE BASIS IS METRIZEERBAAR DWZ ER IS EEN METRIEK DIE DE TOPOLOGIE BEPAALT.

BEWYS

STEL (X, τ) IS REGULIER, MET EEN AFT. BASIS $\mathcal{B}$.

- DE RUIMTE IS NORMAAL
- STEL $O \in \tau$ EN $x \in O$

GEBRUIK T_3 TWEE KEER:
ER ZIJN B_1 EN B_2 IN $\mathcal{B}$ ZÓDAT

$$x \in B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq O.$$

DIT TWEETAL ZAL BIJ VEEL PAREN (x, O) GEBRUIKT WORDEN.

NUMMER DE VERZAMELING VAN DIT SOORT PAREN

$$\{(B_1, B_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B};\ B_1 \neq \phi;\ \overline{B_1} \subseteq B_2\}$$

ALS

$$\{(B_{n,1}, B_{n,2}) : n \in \mathbb{N}\}$$

LEMMA VAN URYSOHN: VOOR ELKE n IS ER EEN CONTINUE FUNCTIE

$$f_n : X \longrightarrow [0,1]$$

ZÓDAT ALS $x \in \overline{B_1}$ DAN $f_n(x) = 1$
ALS $x \notin B_2$ DAN $f_n(x) = 0$

DEFINIEER NU:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

NB $d(x,y) \leq 2$ ALTYD

d IS ECHT EEN METRIEK.

- $d(x,y) \geq 0$ DUIDELYK
- $d(x,x) = 0$ DUIDELYK
- STEL $x \neq y$ ER IS EEN n MET

$$x \in B_{n,1} \quad \text{EN} \quad y \notin \overline{B_{n,2}}$$

DAN $d(x,y) \geq 2^{-n} |\underbrace{1}_{f_n(x)} - \underbrace{0}_{f_n(y)}| = 2^{-n}$.

- $d(x,y) = d(y,x)$ DUIDELYK
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ OOK DUIDELYK

$$|f_n(x) - f_n(z)| = |f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f_n(z)|$$
$$\leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(z)|$$

- d BEPAALT DE TOPOLOGIE!

(i) ALS $O \in \tau$ EN $x \in O$ DAN IS ER EEN $r > 0$: $B(x,r) \subseteq O$

DWZ $\tau \subseteq \tau_d$

(ii) ELKE BOL $B(x,r)$ ZIT IN τ

WANT DAN VOLGT $\tau_d \subseteq \tau$

(i) NEEM EEN n ZÓ DAT

$$x \in B_{n,1} \subseteq \overline{B_{n,1}} \subseteq B_{n,2} \subseteq \overline{B_{n,2}} \subseteq O$$

VOOR $y \notin O$ GELDT $f_n(y) = 0$

EN $f_n(x) = 1$

DUS $y \notin O \Rightarrow d(x,y) \geq 2^{-n}$

OFWEL ALS $d(x,y) < 2^{-n}$ DAN $y \in O$

DUS $B(x, 2^{-n}) \subseteq O$

(ii) NEEM x VAST

- VOOR ELKE n IS $y \mapsto |f_n(x) - f_n(y)|$ CONTINU
- $g_x(y) = \sum_{n=0} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$ IS OOK CONTINU:

UNIFORME CONV. WANT $\underline{M\text{-TEST}}$

g_x IS CONTINU EN

$$B(x, r) = g_x^{-1}[(-\infty, r)]$$

IS DUS OPEN.