AM3590 2021-10-26

1 Het Lemma van Urysohn.

Een topologische ruimte (X,τ) heeft de T_4-eigenschap desda voor elk tweetal disjuncte gesloten verzamelingen F en G een continue functie $f: X \to [0,1]$ bestaat zó dat

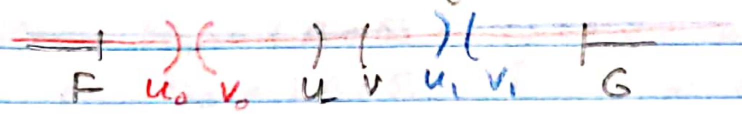
$f(x)=0$ voor $x\in F$ en $f(x)=1$ voor $x\in G$.

Bewijs

$\Leftarrow$ Gegeven f neem

$U = f^{-1}[[0,\tfrac{1}{3})]$ en $V = f^{-1}[(\tfrac{2}{3},1]]$.

$\Rightarrow$ Het mooie van de T_4-eigenschap is de symmetrie en dat deze herhaaldelijk te gebruiken is.



Herhaal voor F en $X\setminus U$: U_0 en V_0

Herhaal voor $X\setminus V$ en G : U_1 en V_1

Enzovoort: F en $X\setminus U_0$

$X\setminus V_0$ en $X\setminus U$

$X\setminus V$ en $X\setminus U_1$

$X\setminus V_1$ en G

Op deze manier kun je een rij familie $\{U_q : q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\}$ van open verzamelingen maken zó dat

$F\subseteq U_0$; $U_1\cap G=\emptyset$;

als $p<q$ dan $\overline{U_p}\subseteq U_q$

Definieer $f: X\to[0,1]$ door

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\notin U_1 \\ \inf\{q : x\in U_q\} & x\in U_1.\end{cases}$$

Duidelijk: als $x\in F$ dan $f(x)=0$

als $x\in G$ dan $f(x)=1$

CONTINUÏTEIT: GEBRUIK DE SUBBASIS
$\{[0,r) : r \in (0,1]\} \cup \{(r,1] : r \in [0,1)\}$
ER GELDT
- $f(x) < r$ DESDA ER IS EEN $q \in \mathbb{Q} \cap [0,r)$ MET $x \in U_q$
  DUS $f^{-1}[[0,r)] = \bigcup_{q<r} U_q$
- $f(x) > r$ DESDA ER IS EEN $q \in \mathbb{Q} \cap (r,1]$ MET $x \notin \overline{U}_q$
  DUS $f^{-1}[(r,1]] = \bigcup_{q>r} (X \setminus \overline{U}_q)$

(2) ALS (X,τ) EEN REGULIERE RUIMTE IS MET EEN AFTELBARE BASIS DAN IS X NORMAAL.

BEWIJS

LAAT $\mathcal{B}$ EEN AFTELBARE BASIS VOOR (X,τ) ZIJN.
LAAT F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN.
NEEM $\mathcal{B}_F = \{B \in \mathcal{B} : B \cap F \neq \emptyset \text{ EN } \overline{B} \cap G = \emptyset\}$
EN $\mathcal{B}_G = \{B \in \mathcal{B} : \overline{B} \cap F = \emptyset \text{ EN } B \cap G \neq \emptyset\}$
ER GELDT $F \subseteq \bigcup \mathcal{B}_F$ EN $G \subseteq \mathcal{B}_G$
TEL DE FAMILIES AF: $\mathcal{B}_F = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$
EN $\mathcal{B}_G = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$.

DEFINIEER

$$U_0 = B_0 \qquad V_0 = C_0 \setminus \overline{B}_0$$
$$U_1 = B_1 \setminus \overline{C}_0 \qquad V_1 = C_1 \setminus (\overline{B}_0 \cup \overline{B}_1)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$U_n = B_n \setminus \bigcup_{i<n} \overline{C}_i \qquad V_n = C_n \setminus \bigcup_{i\leq n} \overline{B}_i$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

DAN $F \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$; $G \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$
EN
$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) = \emptyset.$$

③ ALS (X,τ) EEN REGULIERE RUIMTE IS MET EEN AFTELBARE BASIS DAN IS (X,τ) METRIZEERBAAR, DAT WIL ZEGGEN, ER IS EEN METRIEK d op X DIE τ BEPAALT.

BEWYS

ZIJ $\mathcal{B}$ EEN AFTELBARE BASIS VOOR (X,τ)

MERK op ALS O open IS EN $x \in O$

DAN ZIJN ER B EN C IN $\mathcal{B}$ ZÓ DAT

$$x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq C \subseteq O$$

WEGENS DE REGULARITEIT.

WE NEMEN DE VERZAMELING VAN ZULKE PAREN:

$$\{ (B_1, B_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B} ;\ B_1 \neq \emptyset ;\ \overline{B_1} \subseteq B_2 \}$$

TEL DEZE AF: $\{ (B_{m,1}, B_{m,2}) : m \in \mathbb{N} \}$.

NEEM VOOR ELKE m EEN CONTINUE FUNCTIE $f_m : X \to [0,1]$ ZÓ DAT

$f_m(x) = 1$ ALS $x \in \overline{B}_{m,1}$ EN

$f_m(x) = 0$ ALS $x \notin B_{m,2}$

DEFINIEER $d(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} | f_m(x) - f_m(y) |$

- $d(x,y) \geq 0$ DUIDELYK
- $d(x,x) = 0$ DUIDELYK
- $x \neq y$: ER IS EEN m MET $x \in B_{m,1}$ EN $y \notin B_{m,2}$ WEGENS $T_3 + \underline{T_1}$

  DAN $f_m(x) = 1$ EN $f_m(y) = 0$

  DUS $d(x,y) \geq 2^{-m}$
- $d(x,y) = d(y,x)$ DUIDELYK
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ DUIDELYK

  $\left(| f_n(x) - f_n(z) | \leq | f_n(x) - f_n(y) | + | f_n(y) - f_n(z) | \right)$

- STEL $O \in \tau$ EN $x \in O$

  NEEM EEN m MET $x \in B_{m,1}$ EN $B_{m,2} \subseteq O$

  VOOR $y \in X \setminus O$ GELDT $f_m(y) = 0$

  DUS $d(x,y) \geq 2^{-m}$

  CONCLUSIE $B(x, 2^{-m}) \subseteq O$.

- OMGEKEERD: ELKE d-BOL IS IN τ

NEEM x VAST

- VOOR ELKE n IS $y \mapsto |f_n(x) - f_n(y)|$ CONTINU
- DUS $g_x : y \mapsto d(x,y)$ IS CONTINU

  [UNIFORME CONVERGENTIE: M-TEST]
- DUS $B(x,r) = g_x^{-1}[[0,r)]$ IS OPEN.

Scanned with CamScanner