AM 3590 2021-11-09

Compactheid

Een ruimte (X, τ) is compact als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft.

In symbolen:
als $\mathcal{U} \subseteq \tau$ en $\bigcup \mathcal{U} = X$
dan is er een eindige $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$
zo dat $\bigcup \mathcal{V} = X$.

In de literatuur is Hausdorff vaak een deel van de definitie.
(Compacte Hausdorff-ruimten gedragen zich heel goed)

Voorbeelden
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{S}$, N, $\mathbb{N}$, ... allemaal niet
- $[0,1]$, $\mathbb{V}$; wel;
- (X, τ_{CE}) : wel; als $\bigcup \mathcal{U} = X$ neem $U \in \mathcal{U}$ niet-leeg dan is $X \setminus U$ eindig dus nog $U_x \in \mathcal{U}$ voor $x \in X \setminus U$ toevoegen (met $x \in U_x$ dus).
- (X, τ_I) : wel; er is maar één open verzameling die niet-leeg is

Opgave
Als (A, τ_A) een deelruimte van (X, τ) is dan geldt:
(A, τ_A) is compact desda voor elke familie $\mathcal{U} \subseteq \tau$ met $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ is er een eindige $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ met $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

Opgave
Een gesloten deelruimte van een compacte ruimte is compact.

Karakterizering

- Voor elke familie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen met $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ is er een eindige $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ met $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$
- Voor elke familie $\mathcal{F}$ van gesloten verzamelingen geldt
  als voor elke eindige $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ geldt $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ dan geldt $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Eigenschappen

- Een gesloten deelruimte van een compacte ruimte is compact [nadruk]
- Als (X, τ) compact is en $f : X \to (Y, \sigma)$ is continu dan is $f[X]$ compact
  Bewijs: Als $f[X] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ dan $X = \bigcup \{ f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U} \}$ dan zijn er $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ met $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}[U_i]$ en dus $Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

In het bijzonder:
Als (X, τ) compact is en $f : X \to \mathbb{R}$ is continu dan neemt f op X een minimum en een maximum aan.
Immers $f[X]$ is gesloten en begrensd.

Compactheid is dus belangrijk bij existensie-bewijzen voor maxima en minima.

Iets minder flauw
Als (X, τ) een Hausdorff-ruimte is en (A, τ_A) is een compacte deelruimte dan is A gesloten in X.

BEWIJS

STEL $x \in X \setminus A$; GEZOCHT O OPEN MET $x \in O$ EN $O \cap A = \emptyset$.

NEEM VOOR ELKE $a \in A$ OPEN U_a EN V_a MET $a \in U_a$, $x \in V_a$ EN $U_a \cap V_a = \emptyset$.

NEEM $F \subseteq A$ EINDIG ZÓ DAT $A \subseteq \bigcup_{a \in F} U_a$ EN LAAT $O = \bigcap_{a \in F} V_a$.

DAN IS O OPEN, $x \in O$ EN $O \cap \bigcup_{a \in F} U_a = \emptyset$.

[DUS IETS MEER INFO: ER ZIJN DISJUNCTE OPEN VERZ'N O EN U MET $x \in O$, $A \subseteq U$ EN $O \cap U = \emptyset$]

ELKE COMPACTE HAUSDORFF-RUIMTE IS NORMAAL

① REGULIER

ALS $A \subseteq X$ GESLOTEN IS DAN IS A COMPACT

PAS BOVENSTAANDE BEWIJS TOE OP ELKE $x \in X \setminus A$: ER ZIJN O EN U MET $x \in O$, $A \subseteq U$ EN $O \cap U = \emptyset$.

② NORMAAL

LAAT F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN

VOOR ELKE $x \in F$ IS ER EEN OPEN U_x MET $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq X \setminus G$.

NEEM $x_1, \ldots, x_n \in F$ ZÓ DAT $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$.

DAN OOK $\bigcup_{i=1}^n \overline{U_{x_i}} \cap G = \emptyset$

DUS $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ IS OPEN EN $F \subseteq U$, $G \subseteq X \setminus \overline{U}$ EN $U \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset$.

DUS OP EEN COMPACTE HAUSDORFFRUIMTE KUN JE VEEL CONTINUE FUNCTIES MAKEN.

CONVERGENTIE: FILTERS

EEN FILTER op EEN VERZAMELING X $(\neq \emptyset)$ IS EEN NIET-LEGE FAMILIE $\mathcal{F}$ VAN DEELVERZAMELINGEN VAN X MET

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- ALS $F, G \in \mathcal{F}$ DAN $F \cap G \in \mathcal{F}$
- ALS $F \in \mathcal{F}$ EN $G \supseteq F$ DAN $G \in \mathcal{F}$.

N.B. ZEKER $X \in \mathcal{F}$.

VOORBEELDEN:

- $\{X\}$.
- - $x \in X$: $\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : x \in F\}$
  - $A \subseteq X, A \neq \emptyset$: $\mathcal{F}_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$
- X ONEINDIG:

  $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ EINDIG}\}$

  HET FRÉCHET-FILTER
- $\mathbb{R}$: $\{F : \lambda(\mathbb{R} \setminus F) < \infty\}$
- $\mathbb{N}$: $\mathcal{I} = \{I \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in I} 1/(n+1) < \infty\}$

  $\mathcal{F} = \{\mathbb{N} \setminus I : I \in \mathcal{I}\}$

- (X, τ) EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE, $x \in X$

  $\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq X : U \text{ IS EEN OMGEVING VAN } x\}$

  HET OMGEVINGENFILTER VAN x

- $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ EEN RIJ IN X

  $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \geq m)(x_n \in F)\}$

  IS EEN FILTER.

LAAT $\mathcal{F}$ EEN FILTER OP EEN RUIMTE (X, τ) ZIJN
EN LAAT $x \in X$
WE ZEGGEN $\mathcal{F}$ CONVERGEERT NAAR x
ALS $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ NOTATIE $\mathcal{F} \to x$.

NB $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ DESDA $(\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists F \in \mathcal{F})(F \subseteq U)$

ALS $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ EEN RIJ IS EN $\mathcal{F}$ HET
BIJBEHORENDE FILTER DAN
$x_n \to x$ DESDA $\mathcal{F} \to x$.

FILTERCONVERGENTIE IS DE VERVANGER
VAN RIJTJESCONVERGENTIE VOOR TOPOLOGISCHE
RUIMTEN.

ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER OP X IS EN $f : X \to Y$
EEN AFBEELDING DAN IS
$f(\mathcal{F}) = \{ G \subseteq Y : (\exists F \in \mathcal{F})(f[F] \subseteq G) \}$
EEN FILTER, HET BEELDFILTER

- $f : X \to Y$ IS CONTINU IN x DESDA
VOOR ELK FILTER $\mathcal{F}$ MET $\mathcal{F} \to x$
GELDT $f(\mathcal{F}) \to f(x)$

- ALS $A \subseteq X$ EN $x \in X$ DAN
$x \in \overline{A}$ DESDA ER IS EEN FILTER $\mathcal{F}$
MET $A \in \mathcal{F}$ EN ZÓ DAT $\mathcal{F} \to x$.

- X IS HAUSDORFF DESDA ELK CONVERGENT
FILTER OP X HEEFT
ÉÉN LIMIET.