AM3590 2021-11-12

Filters vergelyken:

Als $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ filters zyn en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$
dan zeggen we $\mathcal{G}$ is fyner dan $\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$ is grover dan $\mathcal{G}$.

Als $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ een ry is met filter $\mathcal{F}$
en $\mathcal{G}$ is het filter van een deelry $\langle x_{n_k} : k \in \mathbb{N} \rangle$
dan is $\mathcal{G}$ fyner dan $\mathcal{F}$

Stelling

$(X, \mathcal{T})$ is compact desda voor elk filter $\tilde{\mathcal{F}}$ is er een fyner filter dat convergeert

Bewys

$\Rightarrow$ Als $\mathcal{F}$ een filter is dan $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$
want $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_n} \supseteq \overline{F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n}$
Neem $x \in \bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ en definieer
$\mathcal{G} = \{G \subseteq X : (\exists U \in \mathcal{U}(x))(\exists F \in \mathcal{F})(U \cap F \subseteq G)\}$
- $\mathcal{G}$ is een filter
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$
- $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{G}$

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ een familie gesloten verz'n
met de eindige-doorsnede-eigenschap
owz als $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ eindig is dan $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.
Definieer
$$\mathcal{G} = \{G \subseteq X : (\exists \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F})(|\mathcal{F}'| < \omega \wedge \bigcap \mathcal{F}' \subseteq G)\}$$
- $\mathcal{G}$ is een filter en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
- Als $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{G}$ en $\mathcal{H} \to x$ dan $x \in \bigcap \mathcal{F}$

ULTRAFILTERS

EEN FILTER $\mathcal{F}$ OP X IS EEN <u>ULTRAFILTER</u> ALS ER GEEN ECHT FIJNER FILTER DAN $\mathcal{F}$ IS
DWZ ALS $\mathcal{G}$ EEN FILTER IS EN $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$
DAN $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

WE ZEGGEN OOK: $\mathcal{F}$ IS EEN <u>MAXIMAAL</u> FILTER

VOORBEELD $\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : x \in F\}$ IS EEN ULTRAFILTER

NB: ALS $x \neq y$ DAN $\mathcal{F}_x \not\subseteq \mathcal{F}_y$ EN $\mathcal{F}_y \not\subseteq \mathcal{F}_x$
("MAXIMAAL" BETEKENT IETS ANDERS DAN "MAXIMUM")

DUS:

- ALS $(X, \mathcal{T})$ COMPACT IS DAN CONVERGEERT ELK ULTRAFILTER OP X.
- EN HET OMGEKEERDE?

ULTRAFILTERSTELLING:
ELK FILTER IS BEVAT IN EEN ULTRAFILTER.

DANKZIJ DIE STELLING

- ALS IN $(X, \mathcal{T})$ ELK ULTRAFILTER CONVERGEERT DAN IS $(X, \mathcal{T})$ COMPACT

BEWIJS: STEL $\mathcal{F}$ IS EEN FILTER.
NEEM EEN ULTRAFILTER $\mathcal{U}$ MET $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.
DAT ULTRAFILTER CONVERGEERT. KLAAR!

OK... EN DIE ULTRAFILTERSTELLING?

MEER OVER ULTRAFILTERS

OPGAVE:

ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER IS EN A IS ZO DAT VOOR ALLE $F \in \mathcal{F}$ DE DOORSNEDE $F \cap A$ NIET LEEG IS DAN IS ER EEN FILTER $\mathcal{G}$ MET $\mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{G}$.

[$\mathcal{G} = \{G : (\exists F \in \mathcal{F})(F \cap A \subseteq G)\}$]

GEVOLG

$\mathcal{U}$ IS EEN ULTRAFILTER

DESDA VOOR ELKE $A \subseteq X$ GELDT

ALS $(\forall U \in \mathcal{U})(U \cap A \neq \emptyset)$ DAN $A \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ ER IS EEN FILTER $\mathcal{V}$ MET $\mathcal{U} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{V}$

EN DUS $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ EN $A \in \mathcal{U}$

$\Leftarrow$ STEL $\mathcal{G}$ IS EEN FILTER EN $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$.

VOOR ELKE $G \in \mathcal{G}$ GELDT $(\forall U \in \mathcal{U})(U \cap G \neq \emptyset)$

EN DUS $G \in \mathcal{U}$.

CONCLUSIE $\mathcal{G} = \mathcal{U}$.

MEER KARAKTERIZERINGEN:

1. $\mathcal{U}$ IS EEN ULTRAFILTER
2. ALS $A, B \subseteq X$ EN $A \cup B \in \mathcal{U}$ DAN $A \in \mathcal{U}$ OF $B \in \mathcal{U}$
3. ALS $A \subseteq X$ DAN $A \in \mathcal{U}$ OF $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

1 $\Rightarrow$ 2 ER GELDT $(\forall U \in \mathcal{U})(U \cap A \neq \emptyset)$

OF $(\forall U \in \mathcal{U})(U \cap B \neq \emptyset)$

IMMERS: ZO NIET DAN ZIJN ER U_A EN U_B MET $U_A \cap A = \emptyset = U_B \cap B$

MAAR DAN $U_A \cap U_B \in \mathcal{U}$

EN $(U_A \cap U_B) \cap (A \cup B) = \emptyset$

2 $\Rightarrow$ 3 $A \cup (X \setminus A) = X \in \mathcal{U}$.

3 $\Rightarrow$ 1 STEL $\mathcal{G}$ IS EEN FILTER EN $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$

LAAT $G \in \mathcal{G}$ DAN $U \cap G \neq \emptyset$ VOOR ALLE $U \in \mathcal{U}$

<u>DUS</u> $X \setminus G \notin \mathcal{U}$ EN <u>DUS</u> $G \in \mathcal{U}$.

Keuze Axioma, Welordeningsstelling, en het Lemma van Zorn.

Dit zyn drie belangryke uitspraken in de Wiskunde

Definitie [ook belangryk voor later]
Als $\{X_i : i \in I\}$ een familie verzamelingen is dan is hun <u>Cartesisch produkt</u>

$$\prod_{i \in I} X_i$$

als volgt gedefinieerd:
Het is de verzameling van alle functies f die voldoen aan $\operatorname{dom} f = I$ en $f(i) \in X_i$ voor alle i.

- $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0, n]$ bestaat uit alle ryen $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ die voldoen aan $0 \le x_n \le n$ voor alle n
- Als $X_i = X$ voor alle i dan schryven we ook wel $\prod_{i \in I} X_i = X^I$
  Dus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bestaat uit alle ryen reële getallen
  en $C([0,1], \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$.
- $\prod \{X : X \subseteq \mathbb{R} \text{ en } X \neq \emptyset\}$ bestaat uit alle functies $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan $f(X) \in X$ voor elke X.

Keuze axioma: Als $X_i \neq \emptyset$ voor alle $i \in I$ dan

$$\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset.$$

WELORDENINGEN

EEN RELATIE $<$ OP EEN VERZAMELING X IS EEN **WELORDE(NING)** ALS :

- $x \nless x$
- $x = y$ OF $y < x$ OF $x < y$
- ALS $x < y$ EN $y < z$ DAN $x < z$
- ALS $A \subseteq X$ NIET-LEEG IS DAN IS ER EEN $a \in A$ ZODAT VOOR ALLE $b \in A$ GELDT $b = a$ OF $a < b$.

VOORBEELD : DE GEWONE ORDE OP $\mathbb{N}$

- DEFINIEER $<$ OP $\mathbb{N}$ DOOR
  $m < n$ ALS
  - m IS EVEN EN n IS ONEVEN
  - m EN n EVEN EN $m < n$
  - m EN n ONEVEN EN $m < n$
- DEFINIEER $\lhd$ OP $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ DOOR
  $(k, l) \lhd (m, n)$ ALS $l < n$ OF $l = n$ EN $k < m$
- DE GEWONE ORDE OP $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$: GEEN WELORDE

WELORDENINGSSTELLING

ELKE VERZAMELING HEEFT EEN WELORDE

WAAROM?

MAAKT INDUCTIE EN RECURSIE MOGELIJK.

Het Lemma van Zorn (lastigste)

Een partiële ordening op een verzameling X is een relatie $\leq$ die voldoet aan

- $x \leq x$
- als $x \leq y$ en $y \leq x$ dan $x = y$
- als $x \leq y$ en $y \leq z$ dan $x \leq z$

Voorbeelden

- de relatie $\subseteq$ op families verzamelingen
- $m \mid n$ als "m is een deler van n" er is een k met $k \cdot m = n$ op $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- op $C([0,1], \mathbb{R})$ $f \leq g$ betekent $(\forall t)(f(t) \leq g(t))$

Een partiële orde is <u>inductief</u> als elke <u>keten</u> een bovengrens heeft. (Keten: $x \leq y$ of $y \leq x$ voor $x, y \in K$)

Voorbeeld

$\mathbb{F}$ is de familie van alle filters op X

Stel $\mathbb{G}$ is een keten in $\mathbb{F}$ (dus $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ of $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ als $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{G}$)

dan is $\bigcup \mathbb{G}$ een filter en een bovengrens voor $\mathbb{G}$

- $\emptyset \notin \bigcup \mathbb{G}$ want $\emptyset \notin \mathcal{F}$ voor alle $\mathcal{F} \in \mathbb{G}$
- als $F, G \in \bigcup \mathbb{G}$ dan $F \in \mathcal{F}$ en $G \in \mathcal{G}$ voor $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ in $\mathbb{G}$
  dan $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en $A \cap B \in \mathcal{G} \subseteq \bigcup \mathbb{G}$
  of $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ en $A \cap B \in \mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathbb{G}$
- als $F \in \bigcup \mathbb{G}$ en $F \subseteq G$ dan $G \in \bigcup \mathbb{G}$
  want $F \in \mathcal{F}$ impliceert $G \in \mathcal{F}$ als $\mathcal{F} \in \mathbb{G}$

HET LEMMA VAN ZORN
ALS $(X, \leq)$ INDUCTIEF GEORDEND IS
EN $x \in X$ DAN IS ER EEN $y \in X$
MET $x \leq y$ EN y IS MAXIMAAL
(y MAXIMAAL: ALS $y \leq z$ DAN $y = z$)

HET LEMMA VAN ZORN IMPLICEERT
DE ULTRAFILTERSTELLING.

STELLING
DE DRIE UITSPRAKEN ZIJN EQUIVALENT
(ELK IS MAKKELIJK UIT DE ANDERE(N)
AF TE LEIDEN)

MOEILIJKE STELLING
HET KEUZEAXIOMA IS NIET UIT DE ANDERE
AXIOMA'S VAN DE VERZAMELINGEN AF
TE LEIDEN

HET IS EEN EXTRA <u>AXIOMA</u>

VEEL MOOIE GEVOLGEN
- ULTRAFILTERSTELLING
- ELK PRODUCT VAN COMPACTE RUIMTEN IS COMPACT
  [STELLING VAN TYCHONOFF]
- ELKE VECTORRUIMTE HEEFT EEN BASIS
- CONTINU = RIJTJESCONTINU

⋮