AM3590 2021-11-16

PRODUCTEN VAN TOPOLOGISCHE RUIMTEN

STEL (X,τ) EN (Y,σ) ZIJN TOPOLOGISCHE RUIMTEN

OP $X \times Y$ DEFINIËREN WE DE PRODUCTTOPOLOGIE ρ

- VIA DE SUBBASIS
  $\mathcal{S} = \{T \times Y : T \in \tau\} \cup \{X \times S : S \in \sigma\}$
- OF DE BASIS
  $\mathcal{B} = \{T \times S : T \in \tau, S \in \sigma\}$

DE PRODUCTTOPOLOGIE ρ HEEFT ALLE EIGENSCHAPPEN DIE JE ZOU WILLEN

① DE PROJECTIES $\pi_X : X \times Y \to X$ EN $\pi_Y : X \times Y \to Y$ ZIJN CONTINU
[DUIDELIJK]

② ALS (Z,υ) EEN RUIMTE IS DAN GELDT
$f : Z \to X \times Y$ IS CONTINU
DESDA $\pi_X \circ f$ EN $\pi_Y \circ f$ ZIJN CONTINU

$\Rightarrow$ SAMENSTELLING

$\Leftarrow$ $f^{-1}[T \times Y] = f^{-1}[\pi_X^{-1}[T]] = (\pi_X \circ f)^{-1}[T]$
$f^{-1}[X \times S] = f^{-1}[\pi_Y^{-1}[S]] = (\pi_Y \circ f)^{-1}[S]$.

③ ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER OP $X \times Y$ IS DAN GELDT $\mathcal{F} \to (x,y)$ DESDA $\pi_X(\mathcal{F}) \to x$ EN $\pi_Y(\mathcal{F}) \to y$

$\Rightarrow$ CONTINUÏTEIT

$\Leftarrow$ $\{U \times V : U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)\}$ IS EEN LOKALE BASIS IN (x,y)
$\angle$ $U \times Y \in \mathcal{F}$ WANT $U \in \pi_X(\mathcal{F})$
$X \times V \in \mathcal{F}$ WANT $V \in \pi_Y(\mathcal{F})$
DUS $U \times V \in \mathcal{F}$.

4. $X \times Y$ IS COMPACT DESDA X EN Y ZIJN COMPACT

$\Rightarrow$ π_X EN π_Y ZIJN CONTINU

$\Leftarrow$ LAAT $\mathcal{U}$ EEN OPEN OVERDEKKING VAN $X \times Y$ ZIJN

1. NEEM $x \in X$ VAST:

VOOR ELKE $y \in Y$ IS ER EEN $U_y \in \mathcal{U}$ MET $(x,y) \in U_y$

EN ER ZIJN $T_y \in \tau$ EN $S_y \in \sigma$ ZÓ DAT $(x,y) \in T_y \times S_y \subseteq U_y$.

Y IS COMPACT: ER ZIJN $y_1, \dots, y_k$ MET $Y = \bigcup_{i=1}^{k} S_{y_i}$

NEEM $T(x) = \bigcap_{i=1}^{k} T_{y_i}$

DAN $T(x) \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (T_{y_i} \times S_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i}$

DUS WIJ HEBBEN

$T(x)$ EN EEN EINDIGE $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$

ZÓ DAT $T(x) \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$.

2. $\{T(x) : x \in X\}$ IS EEN OPEN OVERDEKKING VAN X.

DUS ZIJN ER $x_1, \dots, x_\ell$ MET $X = \bigcup_{i=1}^{\ell} T(x_i)$

MAAR DAN

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{\ell} \bigcup \mathcal{U}_{x_i}$$

DUS $\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{U}_{x_i}$ IS EEN EINDIGE DEELOVERDEKKING

5. ALS Y COMPACT IS DAN IS $\pi_X : X \times Y \to X$ GESLOTEN

ZIE STAP 1 IN HET BEWIJS.

6. $X \times Y$ IS T_0, T_1, T_2, T_3 DESDA X EN Y ZIJN T_0, T_1, T_2, T_3

7. $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ IS <u>NIET</u> NORMAAL

8. ALS Y <u>NIET</u> COMPACT IS DAN IS ER EEN RUIMTE X

ZÓ DAT $\pi_X : X \times Y \to X$ NIET GESLOTEN IS.

STEL $\mathcal{F}$ IS EEN FILTER ZONDER FIJNER FILTER DAT CONVERGEERT.

DAN GELDT $\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$ [ZIE BEWIJS]

$X = Y \cup \{p\}$ p een punt niet in Y

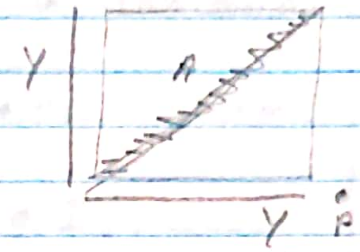
$y \in Y$: $\{y\}$ open

Lokale basis in p: $\{\{p\} \cup F : F \in \mathcal{F}\}$

NB $F \in \mathcal{F}$: $\overline{F} = F \cup \{p\}$ in X.

In $X \times Y$ nemen we

$A = \{(y,y) : y \in Y\}$



- $p \notin \pi_X[A]$

  dwz $\{p\} \times Y \cap A = \emptyset$

  neem $y \in Y$ en $F \in \mathcal{F}$ met $y \notin \overline{F}$

  $O = Y \setminus F$ voor y

  $F \cup \{p\}$ voor p

  dan $((F \cup \{p\}) \times O) \cap \{(y,y) : y \in Y\} = \emptyset$

  dus $(p,y) \notin \overline{A}$

- $p \in \overline{\pi_X[A]}$

  voor $F \in \mathcal{F}$ is $(F \times Y) \cap \{(y,y) : y \in Y\}$ niet leeg

  $\llcorner$ $\{(y,y) : y \in F\}$

  dus $F \cap \pi_X[A] \neq \emptyset$.

<u>Dus</u> X is compact desda voor alle Y is de projectie $\pi_Y : X \times Y \to Y$ gesloten

Opgave Als $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$ compact zijn en O open met $A \times B \subseteq O$ dan zijn er open U en V zo dat $A \times B \subseteq U \times V \subseteq O$.

WILLEKEURIGE PRODUCTEN
GEGEVEN EEN FAMILIE TOPOLOGISCHE RUIMTEN
$\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$
WE MAKEN EEN TOPOLOGIE OP $\prod_{i\in I} X_i$
WE WILLEN ① EN ② (OM TE BEGINNEN)

NEEM ALS SUBBASIS DIE FAMILIE VAN ALLE OPEN STROKEN:
$\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}[O] : O \in \tau_i ; i \in I\}$.

① ELKE PROJECTIE π_i IS NU CONTINU.

② VOOR $f : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ GELDT
- f CONTINU $\to$ $\pi_i \circ f$ CONTINU (ALLE i)
- ALLE $\pi_i \circ f$ CONTINU $\to$ f CONTINU
  WANT $f^{-1}[\pi_i^{-1}[O]] = (\pi_i \circ f)^{-1}[O]$.

BIJBEHORENDE BASIS $\mathcal{B}$:
$B \in \mathcal{B}$ DESDA $B = \prod_{i\in I} O_i$ MET $O_i \in \tau_i$ VOOR ALLE i ÈN $\{i : O_i \neq X_i\}$ IS EINDIG.
"EINDIG OPEN BLOK"

OOK NU
$\prod_{i\in I} X_i$ IS T_0, T_1, T_2, T_3 DESDA ELKE X_i IS T_0, T_1, T_2, T_3
$\Leftarrow$. ALS $(x_i)_i \neq (y_i)_i$
DAN $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ VOOR TEN MINSTE EEN i_0.
NEEM DAN $\pi_{i_0}^{-1}[O]$ EN/OF $\pi_{i_0}^{-1}[U]$ VOOR x_{i_0}, y_{i_0}
. T_3 ALS $(x_i)_i \in O$ EN $(x_i)_i \in \prod_{i\in I} O_i \subseteq O$
NEEM, ALS $O_i \neq X_i$ EEN U_i MET
$x_i \in U_i \subseteq \overline{U_i} \subseteq O_i$; ANDERS $U_i := X_i$
DAN $(x_i)_i \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq \overline{\prod_{i\in I} U_i} \subseteq \prod_{i\in I} O_i \subseteq O$.

$\Rightarrow$ NEEM $p = (p_i)_i$ VAST ; VOOR $j \in I$
DAN $x \mapsto p_x = (q_i)_i$ $q_j = x$ $q_i = p_i$ $(i \neq j)$
MAAKT VAN X_j EEN DEELRUIMTE VAN $\prod_{i\in I} X_i$.

Er geldt ook hier

Als $\mathcal{F}$ een filter op $\prod_{i \in I} X_i$ is

dan $\mathcal{F} \to (x_i)_i$ desda $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i$.

$\Rightarrow$ continuïteit

$\Leftarrow$ elke strook $\pi_j^{-1}[U]$ met $(x_i)_i \in \pi_j^{-1}[U]$

zit in $\mathcal{F}$ want er is een $F \in \mathcal{F}$

met $\pi_j[F] \subseteq U$

dus elk eindig open blok om $(x_i)_i$

zit in $\mathcal{F}$ en dat is genoeg.

Stelling van Tychonoff

$\prod_{i \in I} X_i$ is compact desda elke X_i is compact

$\Rightarrow$ duidelijk

$\Leftarrow$ Zij $\mathcal{U}$ een ultrafilter op $\prod_{i \in I} X_i$.

- $\pi_i(\mathcal{U})$ is een ultrafilter op X_i

dus convergent

! - kies voor elke i een limiet x_i.

- dan $\mathcal{U} \to (x_i)_i$

- Kiezen is iha nodig als X_i niet Hausdorff is
- Stelling van Tychonoff voor Hausdorffruimten volgt dus uit de Ultrafilterstelling
- De stelling van Tychonoff voor alle (T_1-)ruimten impliceert het Keuzeaxioma.