# AM 3590 2021-11-19

## OVER DE SOMMEN

1 [OPGAVE 1.7.1 IN ENGELKING'S BOEK]

(a) BETER $A^{-c-c-c-c} = A^{-c-c}$

WANT $A^{-c-c} = \operatorname{INT} \overline{A}$

EN $A^{-c-c-c-c} = \operatorname{INT} \overline{(\operatorname{INT} \overline{A})}$

(i) $\operatorname{INT} \overline{A} \subseteq \overline{\operatorname{INT} \overline{A}}$ EN $\operatorname{INT} \overline{A}$ IS OPEN

DVS $\operatorname{INT} \overline{A} \subseteq \operatorname{INT} \overline{(\operatorname{INT} \overline{A})}$

(ii) $\operatorname{INT} \overline{A} \subseteq \overline{A}$ DVS $\overline{\operatorname{INT} \overline{A}} \subseteq \overline{A}$

EN $\operatorname{INT} \overline{(\operatorname{INT} \overline{A})}$ IS OPEN

DVS $\operatorname{INT} \overline{(\operatorname{INT} \overline{A})} \subseteq \operatorname{INT} \overline{A}$

6: $A^{-}$, $A^{-c}$, $A^{-c-}$, $A^{-c-c}$, $A^{-c-c-}$, $A^{-c-c-c}$, $A^{-c-c-c-} = A^{-c-}$

7: $A^{c}$, $A^{c-}$, $A^{c-c}$, $A^{c-c-}$, $A^{c-c-c}$, $A^{c-c-c-}$, $A^{c-c-c-c}$, $A^{c-c-c-c-} = A^{c-c-}$

1 $A$

(b) VOORBEELD VAN DUUK:

$(0,1) \cup [2,3] \cup ([4,5] \cap \mathbb{Q}) \cup (6,7) \cup (7,8) \cup \{9\}$

2 $\{\langle 0,0\rangle\} \cup \{\langle 2^{-m},0\rangle : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 2^{-m},2^{-n}\rangle : m,n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{B}_{\langle 2^{-m},2^{-n}\rangle} = \{\{\langle 2^{-m},2^{-n}\rangle\}\}$ $\mathcal{B}_{\langle 2^{-m},0\rangle} = \{B(m,k) : k \in \mathbb{N}\}$

$B(m,k) = \{\langle 2^{-m},0\rangle\} \cup \{\langle 2^{-m},2^{-n}\rangle : n \geq k\}$

$\mathcal{B}_{\langle 0,0\rangle} = \{B(f,k) : k \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$

$B(f,k) = \{\langle 0,0\rangle\} \cup \{\langle 2^{-m},0\rangle : m \geq k\}$
$\cup \{\langle 2^{-m},2^{-n}\rangle : m \geq k, n \geq f(m)\}$

(a) OK
- $\{\langle 2^{-m},2^{-n}\rangle\} \subseteq B(m,k)$ $n \geq k$
- $B(m,f(m)) \subseteq B(f,k)$ $m \geq k$

(b) ALS $x_n \to \langle 0,0\rangle$ DAN IS VOOR ELKE $m$

DE VERZ $F_m = \{\ell : \exists n\ x_n = \langle 2^{-m},2^{-\ell}\rangle\}$ EINDIG

NEEM $f$ CONSTANT 0 EN BEKIJK $B(f,m+1)$

DEFINIEER $g(m) = \operatorname{MAX}(F_m \cup \{0\}) + 1$

DAN $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap B(g,0) = \emptyset$.

3. $\tau_e$ op $\mathbb{R}$ met $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ als extra open verz.

a) Als $q \in \mathbb{Q}$ dan $q \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

dus $\{O \in \tau : q \in O\} = \{O \in \tau_e : q \in O\}$

en dus is $\{(q-r, q+r) : r > 0\}$ een lokale basis

Als $p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dan $\{O \in \tau_e : p \in O\} = \{O \in \tau : p \in O\}$

$\cup \{O\setminus\mathbb{Q} : p \in O\}$

dus voor $O \in \tau_e$ met $p \in O$ is er een $r > 0$

zó dat $(p-r, p+r)\setminus\mathbb{Q} \subseteq O$.

b) Stel $U$ en $V$ zijn open met $\pi \in U$ en $\mathbb{Q} \subseteq V$

($\mathbb{Q}$ is gesloten!)

Neem $r > 0$ met $(\pi - r, \pi + r)\setminus\mathbb{Q} \subseteq U$

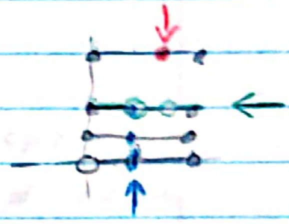
en $q \in \mathbb{Q} \cap (\pi - r, \pi + r)$

en $s > 0$ met $(q-s, q+s) \subseteq (\pi - r, \pi + r)$

dan $U \cap V \supseteq ((\pi - r, \pi + r)\setminus\mathbb{Q}) \cap (q-s, q+s)$

$= (q-s, q+s)\setminus\mathbb{Q}$

$\neq \emptyset$.



4. $H_n = [0,1] \times \{2^{-n}\}$ $\quad H_\infty = (0,1] \times \{0\}$

a)

1) $B_{\langle x,y \rangle} = \{\{\langle x,y\rangle\}\}$ $(x, y > 0)$

$B_{\langle x,0 \rangle} = \{B(x,k) : k \in \mathbb{N}\}$ $\quad B(x,k) = \{\langle x,0\rangle\} \cup \{\langle x, 2^{-n}\rangle : n \geq k\}$

$B_{\langle 0,2^{-n} \rangle} = \{H_n \setminus F : F$ eindig $\langle 0, 2^{-n}\rangle \notin F\}$

Goede lokale basis duidelijk

2) $P\setminus\{\langle x, 2^{-n}\rangle\} = H_n\setminus\{\langle x, 2^{-n}\rangle\} \cup \bigcup_{m<n} H_m$

$\cup \bigcup_{m>n} H_m \cup \bigcup\{B(y, n+1) : 0 < y \leq 1\}$

$P\setminus(H_n\setminus F) = \bigcup_{m<n} H_m \cup \bigcup_{m>n} H_m \cup \bigcup\{B(x,n) : 0 < x \leq 1$ en $\langle x, 2^{-n}\rangle \in F\}$

$\cup \bigcup\{B(x, n+1) : 0 < x \leq 1\}$

$P\setminus B(x,k) = \bigcup\{B(y,0) : 0 < y \leq 1 \wedge y \neq x\}$

$\cup \bigcup_{n<k} H_n$

dus allemaal open-en-gesloten (clopen)

dus $P$ is $T_3$: als $x \notin F$ dan is er een clopen $U$

met $x \in U$ en $U \cap F = \emptyset$

maar dan $V = P\setminus U$ is open

$F \subseteq V$ en $U \cap V = \emptyset$

P IS OOK $T_1$: ALS $x > 0$ EN $n \in \mathbb{N}$
DAN IS $\{\langle x, 2^{-n}\rangle\}$ GESLOTEN
– $\langle 0, 2^{-n}\rangle$: – $H_m \setminus \{\langle 0, 2^{-n}\rangle\}$ IS OPEN
– $P \setminus H_m = \bigcup_{m' \neq m} H_{m'} \cup \bigcup_{m' \geq m} H_{m'}$
$\cup \bigcup \{B(x, m+1) : 0 < x \leq 1\}$
IS OPEN
– $\langle x, 0\rangle$: – $P \setminus \{\langle x, 0\rangle\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \cup \bigcup \{B(y,0) : 0 < y \leq 1, y \neq x\}$

d) STEL $F \subseteq U$ EN $H_\infty \subseteq V$ MET $U$ EN $V$ OPEN
NEEM VOOR ELKE $m$ EEN EINDIGE VERZ. $G_m$
IN $(0,1]$ ZO DAT $H_m \setminus \{\langle x, 2^{-n}\rangle : x \in G_m\} \subseteq U$
[GEEN KEUZE AXIOMA NODIG: $G_m = \{x : \langle x, 2^{-n}\rangle \notin U\}$]
DAN IS $G = \bigcup_m G_m$ AFTELBAAR
NEEM $x \in (0,1] \setminus G$ EN $k$ ZO DAT $B(x,k) \subseteq V$
DAN GELDT $\{\langle x, 2^{-n}\rangle : n \geq k\} \subseteq U \cap V$.
[EN DAT VOOR ALLE $x \in (0,1] \setminus G$ DUS $U \cap V$ IS VRIJ GROOT]

5 (a) DUIDELIJK
(b) STEL $x \in X \setminus \bigcup_n F_n$ EN NEEM $O$ OPEN
MET $x \in O$ EN ZÓ DAT $O \cap F_m = \emptyset$ VOOR
TEN HOOGSTE ÉÉN $m$
DAN $O \cap (\bigcup_n F_n) = \emptyset$ ALS ER GÉÉN $m$ IS
EN $U = O \setminus F_m$ IS EEN OMG. VAN $x$
ALS ER WEL EEN $m$ IS EN $U \cap (\bigcup_n F_n) = \emptyset$
(c) DEFINIEER $f : \bigcup_n F_n \to \mathbb{R}$ DOOR $f(x) = n$ ALS $x \in F_n$.
$f$ IS CONTINU OP $\bigcup_n F_n$
NEEM EEN UITBREIDING $g : X \to \mathbb{R}$
EN ZET $O_n = f^{-1}[(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})]$
d) (i) NEEM $U$ OPEN MET $\bigcup_n F_n \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \bigcup_n O_n$
DAN IS $\{U \cap O_m : m \in \mathbb{N}\}$ DISCREET
OF (ii) NEEM $O_n = f^{-1}[(n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3})]$

NOG OVER COMPACTHEID

STEL $(X,\tau)$ IS EEN RUIMTE
MET EEN BASIS $\mathcal{B}$ EN EEN SUBBASIS $\mathcal{S}$.
DAN ZIJN EQUIVALENT:

① $(X,\tau)$ IS COMPACT

② ELKE OVERDEKKING $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ HEEFT
EEN EINDIGE DEELOVERDEKKING.

③ ELKE OVERDEKKING $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ HEEFT
EEN EINDIGE DEELOVERDEKKING.

① ⇒ ② EN ① ⇒ ③ DUIDELIJK

② ⇒ ① ZIJ $\mathcal{O}$ EEN OPEN OVERDEKKING
ZIJ $\mathcal{U} = \{ B \in \mathcal{B} : (\exists O \in \mathcal{O})(B \subseteq O) \}$
DAN IS $\mathcal{U}$ EEN OVERDEKKING EN $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$
[ $x \in X$ : NEEM $O \in \mathcal{O}$ MET $x \in O$ EN DAN
$B \in \mathcal{B}$ MET $x \in B \subseteq O$ ]
ER ZIJN $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{U}$ ZÓ DAT $X = B_1 \cup \dots \cup B_k$
NEEM $O_1, \dots, O_k \in \mathcal{U}$ MET $B_i \subseteq O_i$
DAN IS $\{O_1, \dots, O_k\}$ EEN EINDIGE
DEELOVERDEKKING VAN $\mathcal{O}$

③ ⇒ ① [ ALEXANDER'S SUBBASISLEMMA ]
STEL $\mathcal{F}$ IS EEN ULTRAFILTER DAT
NIET CONVERGEERT
DUS VOOR ELKE $x$ IS ER EEN $U_x \in \mathcal{U}(x)$
ZÓ DAT $U_x \notin \mathcal{F}$ EN DUS $X \setminus U_x \in \mathcal{F}$
ER IS DAN OOK EEN EINDIGE FAMILIE $\mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S}$
ZÓ DAT $x \in \bigcap \mathcal{S}_x \subseteq U$
DUS $X \setminus \bigcap \mathcal{S}_x \in \mathcal{F}$
OF $\bigcup \{ X \setminus S : S \in \mathcal{S}_x \} \in \mathcal{F}$
DUS IS ER EEN $S_x \in \mathcal{S}_x$ MET $X \setminus S_x \in \mathcal{F}$
MAAR $x \in \bigcap \mathcal{S}_x$ DUS OOK $x \in S_x$.
CONCLUSIE WE HEBBEN $\langle S_x : x \in X \rangle$
MET $x \in S_x$ ; $S_x \in \mathcal{S}$ ; $X \setminus S_x \in \mathcal{F}$
MAAR DAN ZIJN ER $x_1, \dots, x_k$ MET $X = S_{x_1} \cup \dots \cup S_{x_k}$
EN DUS $X \setminus S_{x_1} \cap \dots \cap X \setminus S_{x_k} = \emptyset$ <u>TEGENSPRAAK</u>

Scanned with CamScanner

Ruimte $P$ van het huiswerk is een deelruimte van een product

$H$: $[0,1]$ $\tau = \{U : 0 \in U \to [0,1] \setminus U \text{ eindig}\}$.

$S$: $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

Beide compact

dus $H \times S$ is compact Hausdorff

en $P = (H \times S) \setminus \{(0,0)\}$ als deelruimte

Dus $H \times S$ is normaal met een niet-normale deelruimte.

Wat kunnen we zeggen over deelruimten van compacte Hausdorff ruimten?

- Normaal? Nee
- Regulier? Ja
- Volledig regulier (beter dan regulier)

Stel $X$ is compact Hausdorff en $Y$ is een deelruimte

Stel $F$ is gesloten in $Y$ en $y \in Y \setminus F$

in $X$ geldt dan $y \notin \overline{F}$

er is dan een continue $f : X \to [0,1]$ zo dat
$$\begin{cases} f(y) = 0 \\ f(x) = 1 & x \in \overline{F} \end{cases}$$

En dat is volledig regulier

Elke deelruimte van elke compact Hausdorffruimte is volledig regulier.

Het omgekeerde geldt ook.