AM3590 2021-11-23

STEL X IS VOLLEDIG REGULIER
BEKIJK $C(X,[0,1])$: ALLE CONTINUE FUNCTIES VAN X NAAR $[0,1]$. : $\mathcal{C}$ (AFKORTING)

HET PRODUCT $[0,1]^{\mathcal{C}}$ IS COMPACT HAUSDORFF
DEFINIEER
$$e : X \longrightarrow [0,1]^{\mathcal{C}}$$
DOOR $e(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{C}}$.

- e IS CONTINU
  WANT VOOR ELKE f GELDT
  $\pi_f \circ e = f$
  DUS ELKE SAMENSTELLING IS CONTINU
- e IS INJECTIEF
  ALS $x \neq y$ NEEM f MET
  $f(x) = 0$ EN $f(y) = 1$
  DAN GELDT DUS $e(x)_f \neq e(y)_f$
  EN DUS $e(x) \neq e(y)$
- $e : X \longrightarrow e[X]$ IS OPEN
  STEL $O \subseteq X$ IS OPEN EN $x \in O$
  DUS $e(x) \in e[O] \subseteq e[X]$
  WE ZOEKEN U OPEN IN $[0,1]^{\mathcal{C}}$ ZÓ DAT
  $e(x) \in U \cap e[X] \subseteq e[O]$
  NEEM f ZÓ DAT $f(x) = 0$ EN $f(y) = 1$ ALS $y \in X \setminus O$.
  BEKIJK NU DE f-DE COÖRDINAAT
  $e(x)_f = 0$ EN $e(y)_f = 1$ $(y \in X \setminus O)$
  NEEM $U = \pi_f^{-1}[[0,1)]$
  DAN - $e(x) \in U$
  - $y \notin O \to e(y)_f = 1 \to e(y) \notin U$
  OFWEL $e(y) \in U \to e(y)_f < 1 \to y \in O$.
- DUS $e : X \to e[X]$ IS EEN HOMEOMORFISME
  EN $e[X]$ IS EEN DEELRUIMTE
  VAN DE COMPACTE HAUSDORFFRUIMTE $[0,1]^{\mathcal{C}}$.

BEKIJK $\overline{e[X]}$ DAT IS EEN
COMPACTE HAUSDORFFRUIMTE
WAAR (EEN KOPIE VAN) X DICHT IN LIGT.
EIGENSCHAP: ELKE CONTINUE FUNCTIE
$f: e[X] \to [0,1]$
HEEFT EEN UITBREIDING
$g: \overline{e[X]} \to [0,1]$
NAMELIJK $g = \pi_f \restriction \overline{e[X]}$.

DIT IS DE ČECH-STONE COMPACTIFICATIE VAN X.
NOTATIE βX.
HEEL MOOI VOORBEELD: $\beta \mathbb{N}$
HEEL VEEL BESTUDEERD

DE RUIMTE $\beta\mathbb{N}$ BEANTWOORDT EEN VRAAG
VAN ALEXANDROFF EN URYSOHN
IS ER EEN COMPACTE RUIMTE ZONDER
NIET-FLAUWE CONVERGENTE RIJEN

- $x_n \to x$ IS FLAUW ALS ER EEN m IS
ZÓ DAT $x_n = x$ VOOR $n \geq m$.
- ALS $x_n \to x$ NIET FLAUW IS DAN
IS ER EEN DEELRIJ $\langle x_{n_k} : k \in \mathbb{N} \rangle$
ZÓ DAT $k \neq l \to x_{n_k} \neq x_{n_l}$

DUS ALS ER EEN NIET-FLAUWE CONVERGENTE
RIJ IS DAN IS ER OOK EEN INJECTIEVE.
STEL $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ IS ZO'N RIJ, MET LIMIET x.
EN ZÓ DAT $x_n \neq x$ VOOR ALLE n.
$x_0 \notin \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$
NEEM $U_0 \ni x_0$ EN $V_0 \supseteq \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$ OPEN EN DISJUNCT
NEEM $U_1 \ni x_1$ EN $V_1 \supseteq \{x_n : n \geq 2\} \cup \{x\}$
OPEN DISJUNCT EN $U_1 \subseteq V_0$.
$U_{n+1} \ni x_{n+1}$ EN $V_{n+1} \supseteq \{x_k : k \geq n+2\}$
OPEN DISJUNCT EN $U_{n+1} \subseteq V_n$

WE HEBBEN DUS $\langle U_n : n \in \mathbb{N} \rangle$
MET $x_n \in U_n$; $n \neq m \to U_n \cap U_m = \emptyset$.

KIJK NAAR $\beta\mathbb{N}$

- ALS $A \subseteq \mathbb{N}$ DAN HEEFT $\chi_A : \mathbb{N} \to [0,1]$
  EEN CONTINUE UITBREIDING $\chi_A : \beta\mathbb{N} \to [0,1]$
  DAN $\chi_A[\overline{A}] \subseteq \{1\}$ $\chi_A[\overline{\mathbb{N} \setminus A}] \subseteq \{0\}$
  DUS $\overline{A} \cap \overline{\mathbb{N} \setminus A} = \emptyset$ EN $\overline{A} \cup \overline{\mathbb{N} \setminus A} = \beta\mathbb{N}$
  WE ZIEN $\overline{A}$ IS CLOPEN
- ALS $O \subseteq \beta\mathbb{N}$ OPEN IS DAN GELDT
  $\overline{O} = \overline{O \cap \mathbb{N}}$ [OPGAVE]
  DUS $\overline{O}$ IS OPEN
  EN ALS $U \cap V = \emptyset$ BEIDE OPEN
  DAN $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$
  $\beta\mathbb{N}$ IS EXTREEM ONSAMENHANGEND
  (O open $\to \overline{O}$ open ; U, V open disj $\to \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$)
- OPGAVE $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ voor $A, B \subseteq \mathbb{N}$

STEL NU DAT $x_n \to x$ EN $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ IS INJECTIEF
BEPAAL OPEN $U_n \ni x_n$ MET $U_m \cap U_n = \emptyset$ ALS $m \neq n$.
BEKIJK NU $U = \bigcup\{U_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ EN $V = \bigcup\{U_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
DAN $U \cap V = \emptyset$ EN DUS $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$
MAAR $x \in \overline{\{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\{x_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{U} \cap \overline{V}$.
TEGENSPRAAK.

EEN REGULIERE RUIMTE DIE NIET VOLLEDIG REGULIER IS.

VOLGENDE PAGINA

1 Een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$

Voor even $n \in \mathbb{Z}$ definieer

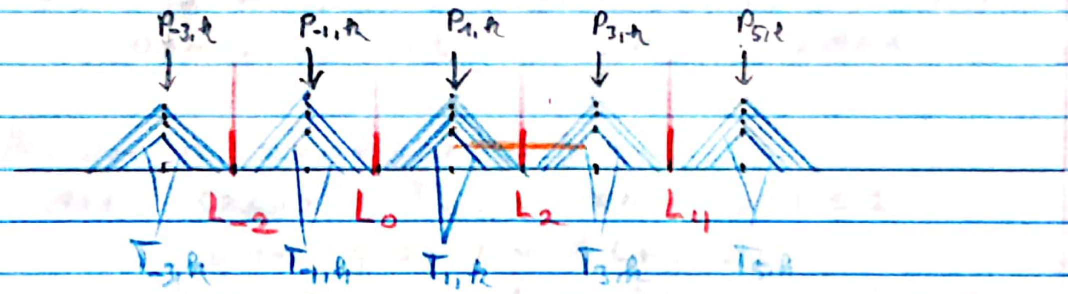
$$L_n = \{ \langle n, y \rangle : 0 \leq y < \tfrac{1}{2} \}$$

Voor oneven $n \in \mathbb{Z}$ en $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq 2$

$$T_{n,k} = \{ \langle n+t, (1-\tfrac{1}{k}) - t \rangle : 0 < t \leq 1 - \tfrac{1}{k} \}$$
$$\cup \{ \langle n-t, (1-\tfrac{1}{k} - t \rangle : 0 < t \leq 1 - \tfrac{1}{k} \}$$
$$p_{n,k} = \langle n, 1 - \tfrac{1}{k} \rangle$$

$$S_1 = \bigcup \{ L_n : n \text{ even} ; n \in \mathbb{Z} \}$$
$$S_2 = \{ p_{n,k} : n \text{ oneven} ; n \in \mathbb{Z} ; k \in \mathbb{N} ; k \geq 2 \}$$
$$S_3 = \bigcup \{ T_{n,k} : n \text{ oneven} ; n \in \mathbb{Z} ; k \in \mathbb{N} ; k \geq 2 \}$$

$$X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$



Omgevingen:

- punten in S_3: geisoleerd: $\mathcal{B}_{\langle x,y \rangle} = \{ \{ \langle x,y \rangle \} \}$
- punten in S_2: $\mathcal{B}(p_{n,k}) = \{ \{p_{n,k}\} \cup T_{n,k} \setminus F : F \text{ eindig} \}$
  - kort: $B(p_{n,k}, F)$
- punten in S_1: $B(n, y, F) = \{ \langle n,y \rangle \} \cup$
  $\cup \{ \langle x,y \rangle \in S_3 : |x - n| \leq 1 \} \setminus F$
  $\mathcal{B}_{\langle n,y \rangle} = \{ B(n, y, F) : F \text{ eindig} \}$

- X IS (ZELFS) VOLLEDIG REGULIER
  ELKE BASIS-OPEN OMGEVING IS GESLOTEN.

- STEL $f : X \to [0,1]$ IS CONTINU
  BEKIJK $P_{n,k}$
  VOOR ELKE m IS ER EEN EINDIGE $F_m \subseteq T_{n,k}$
  ZÓDAT ALS $\langle x,y\rangle \in T_{n,k} \setminus F_m$
  DAN $|f(x,y) - f(P_{n,k})| < 2^{-m}$
  NEEM $F_{n,k} = \bigcup_m F_m$ — AFTELBAAR
  DAN: ALS $\langle x,y\rangle \in T_{n,k} \setminus F_{n,k}$
  DAN $f(x,y) = f(P_{n,k})$

DE VERZAMELING $A = \bigcup\{F_{n,k} : n \text{ ONEVEN}; k \geq 2\}$
IS AFTELBAAR DUS OOK DE VERZAMELING
y-COÖRDINATEN
ZIJ $B = \{y \mid \{\langle x,y\rangle : x \in \mathbb{R}\} \cap A = \emptyset\}$
DAN IS $[0,\frac{1}{2}) \setminus B$ AFTELBAAR

NEEM n EVEN EN $y \in B$
ALS $\langle x_k,y\rangle \in T_{n-1,k}$ EN $|x_k - n| \leq 1$
DAN $f(x_k,y) = f(P_{n-1,k})$
DUS $f(n,y) = \lim_{k\to\infty} f(x_k,y) = \lim_{k\to\infty} f(P_{n-1,k})$
IDEM $f(n,y) = \lim_{k\to\infty} f(P_{n+1,k})$
EN DIT GELDT VOOR ALLE $y \in B$
NOEM DIE GEMEENSCHAPPELIJKE WAARDE c_n.
HETZELFDE GELDT VOOR $n+2$ EN $n-2$
VOOR $y \in B$ $f(n+2,y) = \lim_{k\to\infty} f(P_{n+1,k})$
$f(n-2,y) = \lim_{k\to\infty} f(P_{n-1,k})$
DUS $c_{n-2} = c_n = c_{n+2}$
DUS f IS CONSTANT OP
$\{(n,y) : n \text{ EVEN}; y \in B\}$

VOEG TWEE PUNTEN TOE AAN X : $-\infty$ EN ∞.

LOKALE BASES IN $-\infty$ EN ∞

$U(-\infty, n) = \{-\infty\} \cup \{\langle x,y\rangle \in X : x < n\}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

$U(\infty, n) = \{\infty\} \cup \{\langle x,y\rangle \in X : x > n\}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

- $U(-\infty, n) \cap X$ IS OPEN IN X:
  - n EVEN $\quad T_{m,k} \subseteq U(-\infty, n)$ ALS $m < n$ (ONEVEN)
    $\quad L_m \subseteq U(-\infty, n)$ ALS $m < n$ (EVEN)
    $\quad \llcorner B(m,y,\varepsilon) \subseteq U(-\infty, n)$
  - n ONEVEN: IDEM
- $U(\infty, n) \cap X$ IS OPEN IN X ANALOOG.
- n EVEN $\quad \mathrm{cl}\, U(-\infty, n) = U(-\infty, n) \cup L_n$
  $\quad \mathrm{cl}\, U(\infty, n) = U(\infty, n) \cup L_n$
  n ONEVEN $\quad \mathrm{cl}\, U(-\infty, n) = U(-\infty, n) \cup \{P_{n,k} : k \geq 2\}$
  $\quad \mathrm{cl}\, U(\infty, n) = U(\infty, n) \cup \{P_{n,k} : k \geq 2\}$

DUS $X \cup \{-\infty, \infty\}$ IS REGULIER

STEL $f : X \cup \{-\infty, \infty\} \longrightarrow [0,1]$ IS CONTINU

BEPAAL B ALS BOVEN

DUS f IS CONSTANT OP $\{\langle n,y\rangle : n \in 2\mathbb{Z}, y \notin B\}$

ZEG MET WAARDE c

MAAR DAN OOK $f(-\infty) = c = f(\infty)$.