AM 3590 2021-11-26

EEN TOEPASSING VAN COMPACTHEID.

BEKIJK EEN (ONEINDIGE) GRAAF (V, E)
DUS - V IS EEN VERZAMELING PUNTEN
(VERTICES)
- E IS EEN DEELVERZAMELING VAN $[V]^2$ $(= \{ e \subseteq V : |e| = 2 \})$
$e = \{u, v\}$ STELT EEN LYN VAN u NAAR v VOOR (EEN EDGE)

EEN KLEURING IS EEN FUNCTIE $f : V \to K$
ZO DAT ALS $\{u, v\} \in E$ DAN $f(u) \neq f(v)$
[PUNTEN VERBONDEN MET EEN LYN KRYGEN VERSCHILLENDE KLEUREN]

ALS $k \in \mathbb{N}$ DAN HEET $G = (V, E)$ k-KLEURBAAR ALS ER EEN KLEURING MET k KLEUREN IS
EEN KLEURING $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ DUS.

STELLING LAAT $k \in \mathbb{N}$
EEN GRAAF IS k-KLEURBAAR
DAN EN SLECHTS DAN ALS
ELKE EINDIGE DEELGRAAF DAT IS.

BEWYS $\Rightarrow$ IS DUIDELYK
$\Leftarrow$ KOST MEER MOEITE.
WE ZOEKEN EEN FUNCTIE $f : V \to k$
OFWEL EEN PUNT UIT HET PRODUCT $X = \{1, \ldots, k\}^V$.
DAT PRODUCT IS COMPACT HAUSDORFF
WE MAKEN EEN FAMILIE GESLOTEN VERZAMELINGEN: VOOR $W \subseteq V$ EINDIG
$$F_W = \{ f \in X : (\forall u, v \in W)(\{u, v\} \in E \to f(u) \neq f(v)) \}.$$
- F_W IS NIET LEEG: NEEM EEN k-KLEURING $g : W \to \{1, \ldots, k\}$ EN DEFINIEER $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ DOOR $f(v) = \begin{cases} g(v) & v \in W \\ 1 & v \notin W \end{cases}$

F_W bevat heel veel functies
elke functie die zo'n g uitbreidt zit in F_W.

- F_W is gesloten in X
  Als $f \notin W$ dan zijn er u en v in W
  met $\{u,v\} \in E$ en $f(u) = f(v)$
  Neem $O = \pi_u^{-1}[\{f(u)\}] \cap \pi_v^{-1}[\{f(v)\}]$
  dan $f \in O$, O is open, en $O \cap F_W = \emptyset$.
- Als W_1 en W_2 eindig zijn
  dan $F_{W_1 \cup W_2} \subseteq F_{W_1} \cap F_{W_2}$
- Dus $\mathcal{F} = \{F : (\exists W)(F_W \subseteq F)\}$ is een filter
  Stel $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ is een convergent filter
  met limiet f
  dan geldt $f \in \bigcap \{F_W : W \subseteq V \text{ eindig}\}$
  Dus f is een k-kleuring.

Toepassing: Het Lemma van de Drie Verzamelingen
Stel X is een verzameling en $f : X \to X$
een afbeelding zó dat $f(x) \neq x$ voor alle x.
Dan zijn er drie deelverzamelingen X_0,
X_1, en X_2 zó dat

- $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$
- $X_i \cap X_j = \emptyset \quad (i \neq j)$
- $f[X_i] \cap X_i = \emptyset \quad i = 0, 1, 2$

Bekijk de graaf (X, F) met
$F = \{\{x, f(x)\} : x \in X\}$.

Bewering: elke eindige deelgraaf
is 3-kleurbaar.

Als $|A| \leq 3$ dan is A 3-kleurbaar
We bewijzen met inductie naar $n \geq 3$
Als $|A| = n$ dan is A 3-kleurbaar.
Die bewering klopt voor $n = 3$

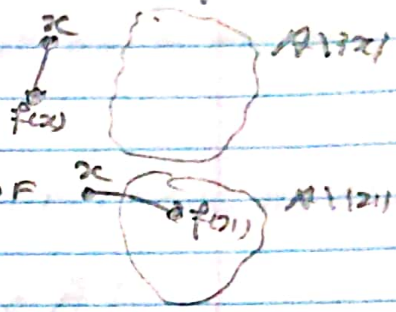
Van n naar $n+1$: stel $|A| = n+1$

Geval 1: $f[A] \neq A$

Dan is er een x in $A \setminus f[A]$

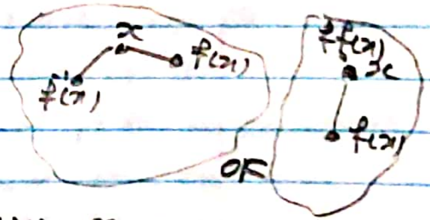
Immers
- $|f[A]| \leq |A|$
- Als $A \subseteq f[A]$ dan ook $|A| \leq |f[A]|$
  en dus $|A| = |f[A]|$
  maar dan moet $A = f[A]$.

Er is een 3-kleuring
$g : A \setminus \{x\} \to \{0,1,2\}$
Als $f(x) \in A$
geef x een kleur
ongelijk aan $g(f(x))$
Als $f(x) \notin A$ dan mag
x elke kleur krijgen.



Geval 2: $f[A] = A$

Dan is f een permutatie van A.
Neem een 3-kleuring $g : A \setminus \{x\} \to \{0,1,2\}$
Geef x een kleur
ongelijk aan
$g(f(x))$ en $g(f^{-1}(x))$



[Er kunnen punten y
buiten A zijn met $f(y) = x$
maar die zijn in dit geval niet
van belang.]

Meer over $\beta\mathbb{N}$

We kunnen $\beta\mathbb{N}$ zien als deelruimte
van $\{0,1\}^{P(\mathbb{N})}$:

$$e : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}^{P(\mathbb{N})}$$
$$n \longmapsto (\chi_A(n))_{A \in P(\mathbb{N})}$$

Dat zijn de enige functies die
we gebruikt hebben.

Scanned with CamScanner

WE HEBBEN GEZIEN VOOR $A, B \subseteq \mathbb{N}$

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\beta\mathbb{N} \setminus \overline{A} = \overline{\mathbb{N} \setminus A}$

(AFSLUITINGEN IN $\beta\mathbb{N}$)

- ALS $O \subseteq \beta\mathbb{N}$ OPEN IS DAN $\overline{O} = \overline{O \cap \mathbb{N}}$

  DUS $\overline{O}$ IS OPEN
- ALS U EN V IN $\beta\mathbb{N}$ DISJUNCT EN OPEN ZIJN DAN $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

— $\beta\mathbb{N}$ IS SEPARABEL: $\mathbb{N}$ IS AFTELBAAR EN DICHT

— STEL $u \in \beta\mathbb{N}$

BEKIJK $\mathcal{U}_u = \{A \subseteq \mathbb{N} : u \in \overline{A}\}$

- $\emptyset \notin \mathcal{U}_u$
- $A, B \in \mathcal{U}_u \rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}_u$
- $A \in \mathcal{U}_u \wedge A \subseteq B \rightarrow B \in \mathcal{U}_u$
- $A \in \mathcal{U}_u$ OF $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U}_u$

DUS $\mathcal{U}_u$ IS EEN ULTRAFILTER op $\mathbb{N}$

— STEL $\mathcal{U}$ IS EEN ULTRAFILTER op $\mathbb{N}$

DAN $\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$ WANT $\beta\mathbb{N}$ IS COMPACT

ALS $x \neq y$ IN $\beta\mathbb{N}$ DAN ZIJN ER OPEN U EN V MET $x \in U$, $y \in V$ EN $U \cap V = \emptyset$

MAAR DAN $x \in \overline{U \cap \mathbb{N}}$ EN $y \in \overline{V \cap \mathbb{N}}$

EN OOK $\overline{U \cap \mathbb{N}} \cap \overline{V \cap \mathbb{N}} = \emptyset$

DUS $U \cap \mathbb{N} \notin \mathcal{U}$ OF $V \cap \mathbb{N} \notin \mathcal{U}$

OFWEL $\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{U}\}$ BESTAAT UIT ÉÉN PUNT, ZEG $x_{\mathcal{U}}$

— ER GELDT DAN $\mathcal{U}_{(x_{\mathcal{U}})} = \mathcal{U}$

$u = x_{(\mathcal{U}_u)}$

DUS ---

Scanned with CamScanner

ALTERNATIEVE BESCHRIJVING VIA

punt in $\beta\mathbb{N}$ $\longleftrightarrow$ ultrafilter op $\mathbb{N}$

$m \in \mathbb{N}$ $\longleftrightarrow$ $\{A : m \in A\}$

$u \in \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ $\longleftrightarrow$ $\{A : u \in \overline{A}\}$

en $\{\overline{A} : A \in \mathcal{U}_u\}$ is een locale basis in u.

Dus - $\beta\mathbb{N}$ is de verzameling van alle ultrafilters op $\mathbb{N}$

- basis voor de topologie:

definieer $\overline{A} = \{u \in \beta\mathbb{N} : A \in u\}$

$\mathcal{B} = \{\overline{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ is een basis

$\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ belangrijke deelruimte

voor $A \subseteq \mathbb{N}$: $A^* = \overline{A}\setminus\mathbb{N} = \overline{A} \cap \mathbb{N}^*$

dus $\{A^* : A \subseteq \mathbb{N}\}$ is een basis voor de topologie van $\mathbb{N}^*$.

. $\mathbb{N}$ is open in $\beta\mathbb{N}$

dus $\mathbb{N}^*$ is compact

- Is $\mathbb{N}^*$ ook separabel?
- Hoeveel punten heeft $\beta\mathbb{N}$?
- is $\mathbb{N}^*$ ook extreem onsamenhangend?

[U en V open en disjunct $\Rightarrow$ $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$]

Eerst

- Als $A \subseteq \mathbb{N}$ eindig is dan $\overline{A} = A$

dus - $A^* \cap B^* = \emptyset$ desda $A \cap B$ eindig

- $A^* \subseteq B^*$ desda $A \setminus B$ eindig

- $A^* = B^*$ desda $A \triangle B$ eindig.

Bijwoord "bijna" bijna disjunct $A \cap B$ eindig

bijna gelijk $A \triangle B$ eindig $A =^* B$

bijna deelverz $A \setminus B$ eindig $A \subseteq^* B$

Scanned with CamScanner

(6)

- $\mathbb{N}^*$ SEPARABEL?

WE MAKEN $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ MET
- ELKE A IS ONEINDIG : $A^* \neq \emptyset$
- PAARSGEWIJS DISJUNCT : $A \neq B$ IN $\mathcal{A}$ GEEFT $A^* \cap B^* = \emptyset$
- $\mathcal{A}$ IS OVERAFTELBAAR

DAN IS ER GEEN AFT. VERZ. D IN $\mathbb{N}^*$
ZO DAT $D \cap A^* \neq \emptyset$ VOOR ALLE $A \in \mathcal{A}$

HOE?

IN PLAATS VAN $\mathbb{N}$ NEMEN WE $\mathbb{Q}$ [SIERPIŃSKI]

ALS x IRRATIONAAL IS EN $x > 1$

BEKIJK DAN $A_x = \{ \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor : n \in \mathbb{N} \}$
- $\lfloor nx \rfloor < nx$ DUS $\frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor < x$
- $\lfloor nx \rfloor < nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ DUS ZELFS

$$\frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor < x < \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor + \frac{1}{n}$$

DUS $x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor$

ALS $x < y$ DAN IS ER EEN m ZO DAT

VOOR $n > m$ GELDT $x < \frac{1}{n} \lfloor ny \rfloor$

DUS $A_x \cap A_y \subseteq \{ \frac{1}{n} \lfloor ny \rfloor : n \leq m \}$ IS EINDIG.

DUS $\mathcal{A} = \{ A_x : x \notin \mathbb{Q} ; x > 1 \}$

IS ALS GEWENST.

- HET PRODUCT $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ IS SEPARABEL [KOMT ZO]

LAAT $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ INJECTIEF ZIJN

EN ZO DAT $f[\mathbb{N}]$ DICHT IS.

- f IS CONTINU WANT $\mathbb{N}$ IS DISCREET.
- VOOR $A \subseteq \mathbb{N}$ HEBBEN WE $\pi_A \circ f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

DAN ZIJN $X_A = \{ n : \pi_A \circ f(n) = 1 \}$

EN $Y_A = \{ n : \pi_A \circ f(n) = 0 \}$ DISJUNCT

EN $X_A \cup Y_A = \mathbb{N}$

DUS $\overline{X_A} \cap \overline{Y_A} = \emptyset$; $\overline{X_A} \cup \overline{Y_A} = \beta \mathbb{N}$

EN $g_A = \chi_{X_A} : \beta \mathbb{N} \to \{0,1\}$ IS CONTINU

DAN IS $g : \beta \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$

$u \mapsto (g_A(u))_A$

OOK CONTINU

Scanned with CamScanner

EN EEN UITBREIDING VAN f

MAAR $g[\beta \mathbb{N}] = g[\overline{\mathbb{N}}] = \overline{g[\mathbb{N}]} = \overline{f[\mathbb{N}]} = \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$

$g : \beta\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$

IS CONTINU EN SURJECTIEF

DUS $\beta\mathbb{N}$ HEEFT TEN MINSTE ZOVEEL PUNTEN ALS $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

EN OOK TEN HOOGSTE: ELK PUNT IS EEN ULTRAFILTER DUS EEN ELEMENT VAN $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

NU NOG DE AFT. DICHTE DEELVERZAMELING MAKEN:

BEKIJK $N = \{\langle n, s\rangle : n \in \mathbb{N};\ s \subseteq \mathcal{P}(\{0,1,\dots,n\})\}$

- N IS AFTELBAAR
- VOOR $A \subseteq \mathbb{N}$ DEFINIEER

$$I_A = \{\langle n,s\rangle \in N : A \cap \{0,1,\dots,n\} \in s\}.$$

- STEL $A_1,\dots,A_k, B_1,\dots,B_l$ ZIJN ALLEMAAL VERSCHILLEND

NEEM m ZO GROOT DAT

$A_1 \cap \{0,\dots,m\}, \dots, A_k \cap \{0,\dots,m\}, B_1 \cap \{0,\dots,m\} \dots B_l \cap \{0,\dots,m\}$

ALLEMAAL VERSCHILLEND ZIJN.

VOOR $n \geq m$ NEMEN WE

$$S_n = \{A_i \cap \{0,\dots,n\} : i = 1,\dots,k\}$$

DAN GELDT

$$\langle n, S_n\rangle \in \bigcap_{i=1}^{k} I_{A_i} \cap \bigcap_{j=1}^{l} (N \setminus I_{B_j})$$

DE FAMILIE

$$\{I_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$$

IS <u>ONAFHANKELIJK</u>.

VIA EEN BIJECTIE $N \leftrightarrow \mathbb{N}$ KRIJGEN WE ZO'N FAMILIE IN $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

DEFINIEER $d_n \in \{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ DOOR

$$d_n(A) = 1 \Leftrightarrow n \in I_A$$

DAN IS $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ DICHT!

Scanned with CamScanner

STEL O IS BASIS OPEN

DUS $O = \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{A_i}^{-1}(1) \cap \bigcap_{j=1}^{l} \pi_{B_j}^{-1}(0)$

VOOR ZEKERE A_i EN B_j

MAAR $d_n \in O$ DESDA $n \in \bigcap_{i=1}^{k} I_{A_i} \cap \bigcap_{j=1}^{l} \mathbb{N} \setminus B_j$

DUS $\{n : d_n \in O\}$ IS ZELFS ONEINDIG.

NB <u>ONAFHANKELIJK</u> KOMT UIT DE LINEAIRE ALGEBRA

$\{\chi_{I_A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ IS <u>LINEAIR ONAFHANKELIJK</u> IN DE VECTORRUIMTE ℓ_∞

TEN SLOTTE: BEKIJK $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ IPV $\mathbb{N}$

- $V_n = \{n\} \times \mathbb{N}$ ONEINDIG
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $L_f = \{\langle m, n\rangle : m \in \mathbb{N};\ n \leq f(m)\}$

DAN: $V_n \cap L_f$ IS ALTIJD EINDIG

DUS $V_n^* \cap L_f^* = \emptyset$ ALTIJD

$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^*$ IS OPEN IN $\mathbb{N}^*$

$U = \bigcup_f L_f^*$ IS OOK OPEN IN $\mathbb{N}^*$

EN $U \cap V = \emptyset$

STEL $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

COMPACTHEID: ER IS EEN $A \subseteq \mathbb{N}$ ZO DAT $\overline{U} \subseteq A^*$ EN $A^* \cap V = \emptyset$.

DUS $A^* \cap V_n^* = \emptyset$ VOOR ALLE n

DUS $A \cap V_n$ IS EINDIG, VOOR ALLE n

ER IS EEN $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ZO DAT

$A \subseteq L_g$

$g(m) = \max\{n : \langle m, n\rangle \in A\} + 1$

MAAR, $\{\langle m, g(m)\rangle : m \in \mathbb{N}\}^* \subseteq L_g^* \subseteq U$

EN $\{\langle m, g(m)\rangle : m \in \mathbb{N}\}^* \cap A^* = \emptyset$

TEGENSPRAAK

DUS $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

Scanned with CamScanner