AM 3590 2021-11-30

PROBLEEM

X EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE

$C(X, \mathbb{R})$ DE VECTORRUIMTE VAN BEGRENSDE CONTINUE FUNCTIES VAN X NAAR $\mathbb{R}$ MET DE UNIFORME NORM

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

KARAKTERISEER COMPACTHEID VAN DEELVERZAMELINGEN VAN $C(X, \mathbb{R})$.

STEL $K \subseteq C(X, \mathbb{R})$ IS COMPACT

EERSTE CONCLUSIES

1. BIJ VASTE x IS $f \longmapsto f(x)$ CONTINU
   DUS $\{f(x) : f \in K\}$ IS COMPACT
2. K IS OOK EEN DEELRUIMTE VAN $\mathbb{R}^X$ TEN OPZICHTE VAN DE PRODUCTTOPOLOGIE τ_p
3. $\mathrm{ID} : (K, \|.\|) \longrightarrow (K, \tau_p)$ IS CONTINU
   WEGENS ① ELKE PROJECTIE π_x IS CONTINU.
4. – DUS (K, τ_p) IS COMPACT HAUSDORFF
   – WEGENS HET HAUSDORFF ZIJN VAN τ_p IS ID EEN GESLOTEN AFBEELDING.
   F GESLOTEN IN $(K, \|.\|)$ IMPLICEERT F IS COMPACT, DUS $\mathrm{ID}[F]$ OOK, TOV τ_p
   DUS $\mathrm{ID}[F]$ IS GESLOTEN TOV τ_p

CONCLUSIE: ALS $(K, \|.\|)$ COMPACT IS DAN

- VOOR ELKE x IS $\{f(x) : f \in K\}$ COMPACT
- $(K, \|.\|) = (K, \tau_p)$:
  DE NORMTOPOLOGIE EN τ_p ZIJN GELIJK OP K
- K IS GESLOTEN TOV τ_p.

VOOR $F \subseteq \mathbb{R}^X$ WILLEKEURIG GELDT
F IS COMPACT TOV τ_p DESDA
- $\{f(x) : f \in F\}$ IS BEGRENSD, VOOR ALLE x
- F IS GESLOTEN TOV τ_p

$\Rightarrow$ $\{f(x) : f \in F\}$ IS ZELFS COMPACT
$\Leftarrow$ VOOR $x \in X$ ZIJ $M_x = \sup\{|f(x)| : f \in F\}$
DAN $F \subseteq \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$
- $\prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$ IS COMPACT
- F IS GESLOTEN IN $\prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$

DUS COMPACT

NODIG: VOORWAARDEN OP $K \subseteq C(X, \mathbb{R})$
DIE KARAKTERIZEREN DAT
K GESLOTEN IS TOV τ_p.

NUTTIG IDEE BEKIJK DE EVALUATIE FUNCTIE
$$ev : C(X, \mathbb{R}) \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, x) \longmapsto f(x)$$
DEZE FUNCTIE IS CONTINU
NEEM $(f, x) \in C(X, \mathbb{R}) \times X$ EN ZIJ $\varepsilon > 0$

- NEEM O OPEN MET $x \in O$
EN $f[O] \subseteq (f(x) - \varepsilon/3, f(x) + \varepsilon/3)$
$(y \in O \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3)$
- STEL NU $(g, y) \in B(f, \varepsilon/3) \times O$
DAN $|g(y) - f(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)|$
$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3$
$< \varepsilon$

ER GELDT OOK: ALS $g \in B(f, \varepsilon/3)$ EN $y \in O$
DAN OOK:
$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - g(x)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$
$$= \varepsilon$$
DUS O IS GOED VOOR ELKE $g \in B(f, \varepsilon/3)$
VOOR DEZE $\varepsilon > 0$.

STEL K IS COMPACT TOV $\|\cdot\|$

BIJ ELKE x EN $\varepsilon > 0$ VINDEN WE VOOR ELKE $f \in K$ EEN OPEN O_f OMGEVING VAN x AFHANKELIJK VAN f

ZODAT

ALS $\|g - f\| < \varepsilon/3$

DAN GELDT VOOR $y \in O_f$ DAT $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$

K IS COMPACT DUS IS ER EEN EINDIGE $F \subseteq K$

ZODAT $K \subseteq \bigcup \{B(f, \varepsilon/3) : f \in F\}$.

LAAT $O = \bigcap \{O_f : f \in F\}$

- O IS EEN OPEN VERZAMELING EN $x \in O$
- VOOR ELKE $g \in K$ GELDT

  ALS $y \in O$ DAN $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$

  [VIA EEN $f \in F$ MET $\|g - f\| < \varepsilon/3$]

DUS: EEN OMGEVING VAN x WERKT VOOR ALLE $g \in K$ TEGELIJK.

WE ZEGGEN DAT K GELIJKMATIG CONTINU IS IN x (OF EQUICONTINU IN x)

CONCLUSIE:

ALS K COMPACT IS TOV $\|\cdot\|$

DAN IS K GELIJKMATIG CONTINU EN BEGRENSD

(BEGRENSD: $\max\{\|f\| : f \in K\}$ BESTAAT)

HET OMGEKEERDE GELDT ALS X COMPACT HAUSDORFF IS.

STEL DUS: $K \subseteq C(X, \mathbb{R})$ IS BEGRENSD EN GELIJKMATIG CONTINU.

- DE AFSLUITING VAN K TOV $\|\cdot\|$ IS OOK GELIJKMATIG CONTINU

Zij $x \in X$ en laat $\varepsilon > 0$
Neem O open met $x \in O$ en zó dat $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$
voor alle $f \in K$ en alle $y \in O$ geldt
Als $g \in \overline{K}$ neem $f \in K$ met $\|g - f\| < \varepsilon/3$
dan volgt $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ voor $y \in O$

Neem nu aan K is gesloten tov $\|\cdot\|$
We bekijken $\overline{K}$ tov τ_p
Stel $g \in \overline{K}$ (tov τ_p)
Zij $x \in X$ en laat $\varepsilon > 0$
Neem weer O bij $\varepsilon/3$ als in de gelijkmatige continuïteit voor K
Zij $y \in O$ en neem $f \in K$
met $|g(y) - f(y)| < \varepsilon/3$ en $|g(x) - f(x)| < \varepsilon/3$
Dan volgt $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$.
Dus $\overline{K}$ (tov τ_p) bestaat uit continue functies en is gelijkmatig continu

We bewijzen dat de topologie τ van $\|\cdot\|$ en de topologie τ_p gelijk zijn op $\overline{K}$
Dan zijn we klaar!
Neem weer $M_x = \sup\{|f(x)| : f \in \overline{K}\}$
Dan $\overline{K} \subseteq \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$
- $\overline{K}$ is compact tov τ_p en dus tov $\|\cdot\|$
- K is gesloten tov $\|\cdot\|$ dus gesloten in $\overline{K}$ en dus compact tov $\|\cdot\|$
- Achteraf $K = \overline{K}$ tov τ_p.

① We weten al dat $\tau_p \subseteq \tau$
② Stel $f \in \overline{K}$ en zij $\varepsilon > 0$
We zoeken een τ_p-omgeving U van f zó dat $U \cap \overline{K} \subseteq B(f, \varepsilon)$

VOOR ELKE $x \in X$ IS ER EEN OPEN O_x
MET $x \in O_x$ EN ZÓ DAT VOOR ALLE $g \in K$
EN ALLE $y \in O_x$ GELDT $|g(y) - g(x)| < \varepsilon/3$

X IS COMPACT : NEEM $E \subseteq X$ EINDIG ZÓ DAT
$$X = \bigcup_{x \in E} O_x$$
NEEM NU
$$\mathcal{U} = \{ h \in \mathbb{R}^X : (\forall x \in E)(|h(x) - f(x)| < \varepsilon/3) \}$$
$$= \bigcap_{x \in E} \pi_x^{-1}[(f(x) - \varepsilon/3, f(x) + \varepsilon/3)]$$
ALS $g \in \mathcal{U} \cap \overline{K}$ EN $y \in X$
DAN IS ER EEN $x \in E$ MET $y \in O_x$
EN DUS
$$|g(y) - f(y)| \leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$
$$= \varepsilon$$

WE ZIEN:
$$\|g - f\| = \max\{|g(y) - f(y)| : y \in X\} < \varepsilon.$$

WE WILLEN MEER
- X NIET NOODZAKELYK COMPACT
- FUNCTIES NIET NOODZAKELYK BEGRENSD

IETS ALS $f_t(x) = x + t$ $\quad f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\{ f_t : 0 \leq t \leq 1 \}$
IS TOCH COMPACT?
TEN OPZICHTE VAN WELKE TOPOLOGIE DAN?

DE COMPACT-OPEN TOPOLOGIE OP $C(X, Y)$.
SUBBASIS
$$\{ M(C, U) : C \subseteq X \text{ compact}; U \subseteq Y \text{ open} \}$$
EN
$$M(C, U) = \{ f : f[C] \subseteq U \}$$
DE TOPOLOGIE NOEMEN WE τ_{co}.