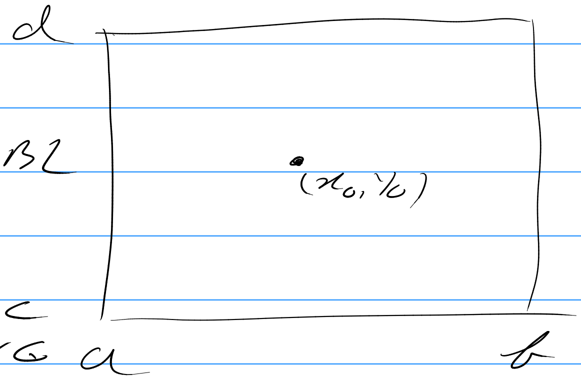
AM3590 2021-12-14

STELLING VAN PEANO

- $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ CONTINU



HET BEGINWAARDEPROBL

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

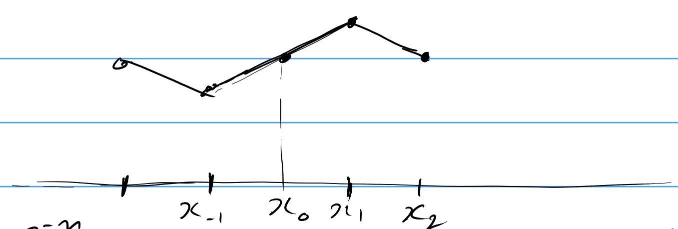
HEEFT EEN OPLOSSING OP EEN INTERVAL $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

[ALS f IN DE y-RICHTING AAN EEN LIPSCHITZ-VOORWAARDE VOLDOET DAN UNICITEIT

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le k|y-z| \quad]$$

[BEWYS VAN DE UNICITEITSVERSIE: DEKPUNTSTELLING VAN BANACH]

- f CONTINU DUS BEGRENSD
  NEEM $M = \max\{|f(x,y)| : a \le x \le b ; c \le y \le d\}$
- VOOR ELKE $m \in \mathbb{N}$ PASSEN WE DE METHODE VAN EULER TOE; MET STAPGROOTTE 2^{-m}.



$x_1 = x_0 + 2^{-m}$ $\qquad$ $x_{-1} = x_0 - 2^{-m}$

$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot 2^{-m}$ $\qquad$ $y_{-1} = y_0 - f(x_0, y_0) \cdot 2^{-m}$

$x_2 = x_1 + 2^{-m}$ $\qquad$ $x_{-2} = x_1 - 2^{-m}$

$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot 2^{-m}$ $\qquad$ $y_{-2} = y_1 - f(x_{-1}, y_{-1}) \cdot 2^{-m}$

RESULTAAT $\varphi_m : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$

NB $|f(x_i, y_i)| \leq M$

DUS ALTIJD

$|\varphi_m(x) - \varphi_m(x_0)|$

$\leq M|x - x_0|$

KIES δ ZÓ DAT VOOR $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$c \leq x_0 \pm M(x - x_0) \leq d$ $\quad a \leq x_0 - \delta$

$x_0 + \delta \leq b$

OP $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ZYN ALLE φ_m GEDEFINIEERD

WE KRYGEN EEN RY FUNCTIES $\langle \varphi_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ OP $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

- DE VERZ. $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ IS GELYKMATIG CONTINU:

$$|\varphi_m(s) - \varphi_m(t)| \leq M|s - t|$$

" $\delta = \varepsilon / M$ WERKT VOOR ALLE φ_m"

- $\overline{\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}}$ IS COMPACT IN $C([x_0 - \delta, x_0 + \delta], \mathbb{R})$ MET $\|\cdot\|_\infty$

ARZELÀ - ASCOLI

$(\{\varphi_m(x) : m \in \mathbb{N}\} \subseteq [c, d])$

- DE RY $\langle \varphi_m : m \in \mathbb{N} \rangle$ HEEFT DUS EEN CONV. DEELRY.

VOOR HET GEMAK: $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ UNIFORM.

$(\varphi_{m_k} \longrightarrow \varphi)$

DIE φ IS EEN OPLOSSING VAN ONS BWP

ZEKER $\varphi(x_0) = y_0$ ($\varphi_n(x_0) = y_0$ ALLE n)

WE BEWIJZEN NIET

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

MAAR WEL

$$\varphi(x) = \underbrace{y_0 + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(t,\varphi(t))}_{\text{CONTINU}} dt}_{\text{DIFF B.}}$$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \overset{??}{\longleftrightarrow} \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt$$

- f IS UNIFORM CONTINU

DAN VOLGT $f(t,\varphi_n(t)) \longrightarrow f(t,\varphi(t))$ UNIFORM

ZIJ $\varepsilon > 0$ NEEM $\delta > 0$ ZÓ DAT

$\|(x,y) - (u,v)\| < \delta \rightarrow |f(x,y) - f(u,v)| < \varepsilon$

ALS $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \delta$ OP $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

DAN $|f(t,\varphi_n(t)) - f(t,\varphi(t))| < \varepsilon$ OP

$$\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$$

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

RECHTS: $y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$

IS DE LIMIET VAN

$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt$

LINKS $\varphi = \lim \varphi_n$.

WAT IS HET VERBAND

TUSSEN $\underbrace{\varphi_n(x) \text{ EN } y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt}_{\text{AFSTAND NAAR NUL?}}$?

KUNNEN WE BEWIJZEN

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt = 0\,?$$

DAN VOLGT $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$

$$\varphi_n(x) = x_0 + \int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt$$

S_n STAPFUNCTIE:

$i \geq 0$ op $[x_i, x_{i+1}]$ $S_n(t) = f(x_i, y_i)$

$i \leq 0$ op $[x_{i-1}, x_i]$ $S_n(t) = f(x_i, y_i)$

UNIFCONTINUITEIT VAN f

op $[x_i, x_{i+1}]$ GELDT

$$f(t,\varphi_n(t)) - S_n(t)$$
$$= f(t,\varphi_n(t)) - f(x_i, y_i)$$

- $|t - x_i| \leq 2^{-n}$
- $|\varphi_n(t) - y_i| \leq M \cdot 2^{-n}$

WE VINDEN $|f(t,\varphi_n(t)) - S_n(t)| \longrightarrow 0$ UNIFORM

$\varepsilon > 0 \leadsto \delta > 0$ (UNIFCONT.)

$$|(t,\varphi_n(t)) - (x_i, y_i)| \leq 2^{-n}(M+1)$$

n ZO GROOT DAT $2^{-n}(M+1) < \delta$

DAN $|f(t,\varphi_n(t)) - S_n(t)| < \varepsilon$ op $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \longrightarrow 0$$

NU VOLGT

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt$$

$$y' = y^{2/3} \qquad y(0) = 0$$

STRATEGIE:

- EEN FAMILIE FUNCTIES MAKEN
- LATEN ZIEN DAT DE AFSLUITING COMPACT IS VIA ARZELÀ-ASCOLI
- GEBRUIK DAT; HIER: CONVERGENTE DEELRIJ
- MEER HARD WERK: DIE DEELRIJ LEVERT DE OPLOSSING.

MONTEL: "NORMALE FAMILIES VAN FUNCTIES"

PRE-COMPACT (DE AFSLUITING IS COMPACT)

(ELKE RIJ HEEFT CONV DEELRIJ CONV IN DE GROTERE RUIMTE)

G EEN GEBIED IN $\mathbb{C}$

$H(G)$: DE VECTORR. VAN ANALYTISCHE FUNCTIES OP G. HOLOMORF

ALS DEELRUIMTE VAN $C(G,\mathbb{C})$

$C(G,\mathbb{C})$: COMPACT-OPEN TOPOLOGIE

BEPAALD DOOR EEN METRIEK

VIA EEN RIJ $\langle K_n : n \in \mathbb{N} \rangle$

K_n OPEN $\overline{K_n}$ COMPACT $\overline{K_n} \subseteq K_{n+1}$

$\bigcup_n K_n = G$

CONVERGENTIE $\equiv$ UNIFORME CONV OP COMPACTE VERZ'N

① $H(G)$ IS GESLOTEN IN $C(G,\mathbb{C})$

STEL $\underset{\underset{H(G)}{\cap}}{f_n} \longrightarrow f$ TOV τ_{co}

KROMME γ $\qquad \int_\gamma f_n = 0$ ALLE n

DUS $\int_\gamma f = 0$

VOOR ELKE KROMME γ (GESLOTEN) IN S

DE MORERA: f IS ANALYTISCH OP S.

z EN S WILLEKEURIG: $f \in H(G)$

DUS ALS $K \subseteq H(G)$

DAN $\overline{K} \subseteq H(G)$ AFSL IN $C(G, \mathbb{C})$

MONTEL: $\overline{K}$ IS COMPACT $\Longleftrightarrow$ K IS LOKAAL BEGRENSD

$\Longrightarrow$ WE WETEN: PUNTSGEWIJS BEGR.

EN GELIJKM. CONTINU

NEEM ZEG: ZIJ $\varepsilon = 1$ NEEM $\delta > 0$ ZÓDAT

$|f(w) - f(z)| < 1$ ALLE w MET $|w-z| < \delta$

ALLE f

$M = \sup\{|f(z)| : f \in K\} + 1$

DAN GELDT $|w - z| < \delta \wedge f \in K$

$\Longrightarrow |f(w)| \leq M$.

$\Longleftarrow$ K LOK. BEGR

ZEKER PUNTSGEWIJS BEGRENSD

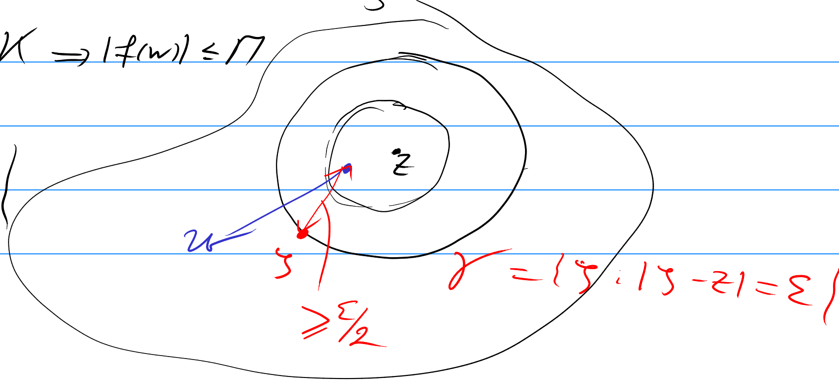
GELIJKMATIG CONTINU:

ZIJ $z \in G$ NEEM $\varepsilon > 0$, $M > 0$

- $|w - z| \leq \varepsilon \wedge f \in K \Rightarrow |f(w)| \leq M$

WERK NU OP

$\{w : |w - z| < \varepsilon/2\}$



NEEM w MET $|w-z| < \varepsilon/2$

$$f(w) - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\underbrace{\zeta - w}_{M}}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)(w-z)}{\underbrace{(\zeta-w)}_{\geq \varepsilon/2}\underbrace{(\zeta-z)}_{\varepsilon}}\,d\zeta$$

$$|f(w) - f(z)| \leq \text{LENGTE } \gamma \cdot \max|\text{FUNCTIEWAARDE}|$$

$$= \cancel{2\pi}\,\cancel{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{M\,|w-z|}{\varepsilon/2 \cdot \cancel{\varepsilon}}$$

$$= 2\frac{M}{\varepsilon}|w-z|$$

DAT IS MEER DAN GENOEG VOOR GELIJKMATIGE CONTINUITEIT.

Vrijdag: RIEMANN AFBEELDING.

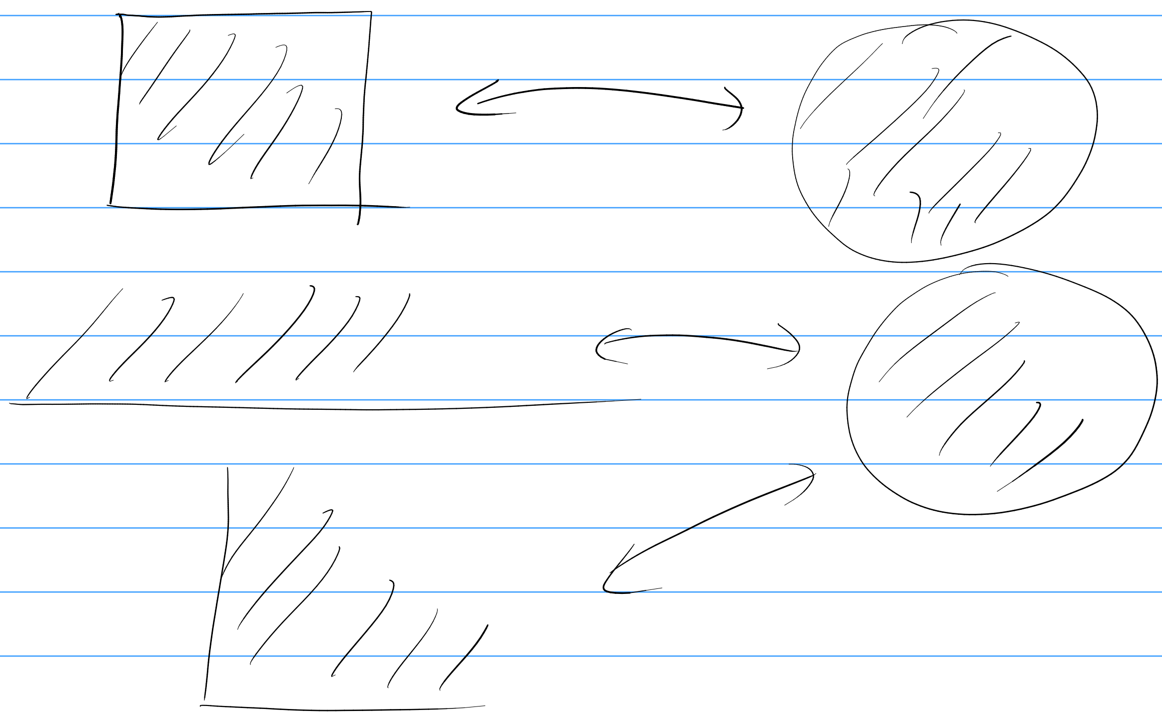
G ENKELV. SAMENH.

$G \neq \mathbb{C}$

DAN IS ER EEN ANALYTISCHE

$$f : G \longrightarrow \underbrace{\{z : |z| < 1\}}_{D}$$

DIE BIJECTIEF IS, EN f^{-1} OOK ANALYTISCH



MONTEL TOEPASSEN op

$K = \{ f \in H(G) : f[G] \subseteq D \}$

$\overline{K}$ IS COMPACT

$z \in G$: $f \longmapsto f'(z)$ IS CONTINU.

WE VINDEN $\underline{f \text{ IN } K}$

ZÓDAT $f(z) = 0$

$f'(z) \in \mathbb{R}$

$f'(z)$ MAXIMUM.

DAN BEGINT HET WERK PAS.