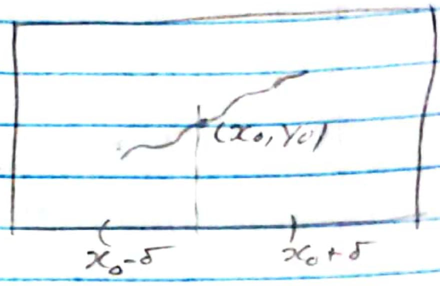
AM3590 2021-12-14

Stelling van Peano

Stel f is continu op een rechthoek $[a,b]\times[c,d]$ in $\mathbb{R}^2$

Neem (x_0,y_0) in het inwendige.



Maak een beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dit probleem heeft een oplossing op een interval van de vorm $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

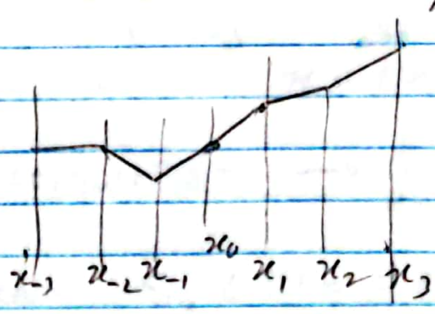
- Stel $M = \max\{|f(x,y)| : a\le x\le b;\ c\le y\le d\}$
- Pas de methode van Euler toe achtereenvolgens met stapgrootte 1, $1/2$, $1/4$, ..., 2^{-n}, ... vooruit en achteruit

  Dus bij vaste n:

- $x_{-1}-2^{-n}=x_{-2}$ $\quad x_0-2^{-n}=x_{-1}$ $\quad x_0$ $\quad x_1=x_0+2^{-n}$, $\quad x_2=x_1+2^{-n}$ ---

$y_{-2}=y_{-1}-2^{-n}f(x_{-1},y_{-1})$ $\quad y_{-1}=y_0-2^{-n}f(x_0,y_0)$ $\quad y_0$ $\quad y_1=y_0+2^{-n}f(x_0,y_0)$ $\quad y_2=y_1+2^{-n}f(x_1,y_1)$

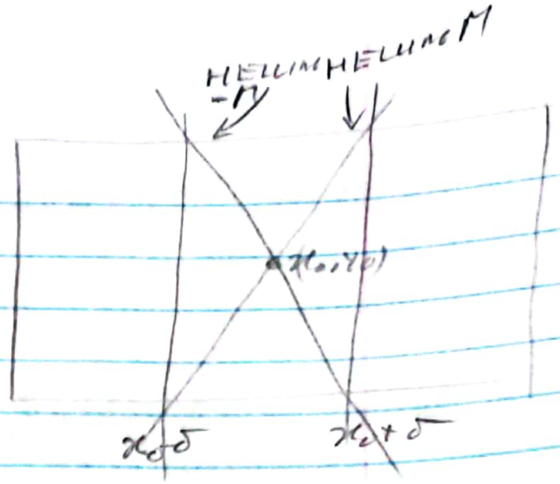
En maak hier een stuksgewijs lineaire functie φ_n van



Elke helling is ten hoogste M

dus $|\varphi_n(t)-\varphi_n(s)| \le M|t-s|$

Dus $\{\varphi_n : n\in\mathbb{N}\}$ is gelijkmatig continu



KIES δ ZO DAT
VOOR $t \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
ALTIJD
$c \leq y_0 \pm M(t-x_0) \leq d$
OP HET INTERVAL
$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ GELDT
VOOR ALLE t EN ALLE m

$$c \leq \varphi_m(t) \leq d.$$

DUS $\{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ IS COMPACT IN $C([x_0-\delta, x_0+\delta], \mathbb{R})$
DE RIJ $\langle \varphi_m : m \in \mathbb{N} \rangle$ HEEFT EEN
UNIFORM CONVERGENTE DEELRIJ
MET LIMIET φ.
DAN GELDT ZEKER $\varphi(x_0) = y_0$
EN OOK GELDT $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ op $(x_0-\delta, x_0+\delta)$
BEWIJS ZBDA $\varphi_m \longrightarrow \varphi$

- f IS UNIFORM CONTINU
  DUS $f(t, \varphi_m(t)) \longrightarrow f(t, \varphi(t))$ UNIFORM
  ZIJ $\varepsilon > 0$ NEEM $\delta > 0$ ZODAT op $[a,b] \times [c,d]$
  GELDT $|(x,y) - (u,v)| < \delta \rightarrow |f(x,y) - f(u,v)| < \varepsilon$
  DAN: ALS $|\varphi_m(t) - \varphi(t)| < \delta$ op $(x_0-\delta, x_0+\delta)$
  DAN $|f(t, \varphi_m(t)) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon$ op $(x_0-\delta, x_0+\delta)$
  CONCLUSIE VOOR $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ GELDT

$$\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_m(t))\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$$

- DEFINIEER $S_m(\tau) = f(x_0 + i\cdot 2^{-m}, \varphi_m(x_0 + i\cdot 2^{-m}))$
  $i \geq 0 \longrightarrow$ op $[x_0 + i\cdot 2^{-m}, x_0 + (i+1)\cdot 2^{-m}]$
  $S_m(\tau) = f(x_0 + i\cdot 2^{-m}, \varphi_m(x_0 + i\cdot 2^{-m}))$
  $i \leq 0 \longrightarrow$ op $[x_0 + (i-1)\cdot 2^{-m}, x_0 + i\cdot 2^{-m}]$
  DAN $\varphi_m(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} S_m(\tau)\,d\tau$

- UNIFORME CONTINUITEIT VAN f
  $f(t, \varphi_m(t)) - S_m(t) \longrightarrow 0$ (UNIFORM)

DUS $\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_m(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} S_m(t)\,dt \to 0$

WE ZIEN

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) \\ &= y_0 + \lim_{m\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_m(t)\,dt \\ &= y_0 + \lim_{m\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_m(t))\,dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\end{aligned}$$

DUS φ IS EEN OPLOSSING VAN DE BIJBEHORENDE INTEGRAAL VERGELIJKING.

NB UNICITEIT IS HIER NIET GEGARANDEERD
$y' = y^{2/3}$ BIJVOORBEELD

STELLING VAN MONTEL
ZIJ G EEN GEBIED IN $\mathbb{C}$ EN $H(G)$ DE VECTORRUIMTE VAN ANALYTISCHE FUNCTIES OP G; GEZIEN ALS DEELRUIMTE VAN $C(G, \mathbb{C})$.
DE COMPACT-OPEN TOPOLOGIE IS DUS DE TOPOLOGIE DIE HIER GEBRUIKT WORDT; ZIE TWEE WEKEN TERUG.

VOOR $K \subset H(G)$ GELDT
$\overline{K}$ IS COMPACT DESDA K IS LOKAAL BEGRENSD

- LOKAAL BEGRENSD
  VOOR ELKE z ZIJN ER $\varepsilon > 0$ EN $M > 0$ ZODAT VOOR ALLE $f \in K$ EN ALLE w MET $|w - z| < \varepsilon$ GELDT $|f(w)| \le M$.
- τ_{co} IS DE TOPOLOGIE VAN UNIFORME CONVERGENTIE OP COMPACTE VERZ'N EN DAT IS DUS HETZELFDE ALS LOKAAL UNIFORME CONVERGENTIE

GEVOLG $H(G)$ IS GESLOTEN IN $C(G,\mathbb{C})$
EN $\overline{K} \subseteq H(G)$ ALS $K \subseteq H(G)$.

- DUS ALS $\overline{K}$ COMPACT IS DAN IS K PUNTSGEWYS BEGRENSD EN GELYKMATIG CONTINU.
  NEEM $z \in G$ EN NEEM $\delta > 0$ ZO DAT
  $|w - z| < \delta \rightarrow |f(w) - f(z)| < 1$ VOOR ALLE f
  DAN $|w - z| < \delta \rightarrow |f(w)| \leq \underbrace{1 + \sup\{|f(z)| : f \in K\}}_{M}$

  DUS K IS LOKAAL BEGRENSD.

- OMGEKEERD STEL K IS LOKAAL BEGRENSD
  - $\overline{K[z]}$ IS COMPACT VOOR ELKE z
  - K IS GELYKMATIG CONTINU.

  ZY $z \in G$ EN NEEM $\varepsilon > 0$ EN $M > 0$
  ZO DAT $|f(w)| \leq M$ ALS $f \in K$ EN $|w - z| < \varepsilon$.
  ALS $|w - z| < \varepsilon/2$
  DAN
  $$f(w) - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z}\right) d\zeta$$
  $$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)\,(w - z)}{(\zeta - w)(\zeta - z)}\, d\zeta$$

  - $|f(\zeta)| \leq M$; $|\zeta - w| \geq \varepsilon/2$; $|\zeta - z| = \varepsilon$
    DVS $\dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta - w||\zeta - z|} \leq \dfrac{M}{\varepsilon/2 \cdot \varepsilon} = 2M/\varepsilon^2$.
  - $$|f(w) - f(z)| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{2M}{\varepsilon^2} \cdot |w - z|$$
    $$= \frac{2M}{\varepsilon} \cdot |w - z|$$

  DAT IS MEER DAN GENOEG VOOR GELYKMATIGE CONTINUÏTEIT.

ALS $\overline{K}$ COMPACT IS DAN WORDT K MEESTAL **NORMAAL** GENOEMD