AM 3590 2021-12-17

RIEMANN-AFBEELDINGSSTELLING

G ENKELVOUDIG SAMENHANGEND GEBIED
$G \neq \mathbb{C}$
DAN IS ER EEN BIJECTIEVE ANALYTISCHE AFBEELDING $f : G \to \mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$

- $\mathcal{B} = \{f \in H(G) : f[G] \subseteq \mathbb{E}\}$
  MONTEL: $\overline{\mathcal{B}}$ IS COMPACT
  $\mathcal{B}$ IS TE GROOT ($\mathcal{B} \neq \emptyset$ ZIE STRAKS)

- ENKELVOUDIG SAMENHANGEND
  - $\int_\gamma f = 0$ VOOR ELKE $f \in H(G)$
    EN ELKE GESLOTEN KROMME γ IN G

  OF - ALS $f \in H(G)$ EN $f(z) \neq 0$ VOOR ALLE z
    DAN IS ER EEN $g \in H(G)$ MET $f = g^2$.

WE NEMEN $\alpha \in G$ VAST EN BEKIJKEN
$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{B} : f(\alpha) = 0 ; f'(\alpha) > 0 ; f$ IS INJECTIEF$\}$

- MONTEL: $\overline{\mathcal{F}}$ IS COMPACT
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$
  NEEM $\beta \in \mathbb{C} \setminus G$ EN $h(z) = z - \beta$
  DAN $h \in H(G)$ EN $h(z) \neq 0$ OP G
  DUS IS ER EEN $g \in H(G)$ MET $g(z)^2 = z - \beta$
  - g IS INJECTIEF
    ALS $g(z) = \pm g(w)$ DAN
    $z = \beta + g(z)^2 = \beta + g(w)^2 = w$
  - OPEN-AFBEELDINGSSTELLING
    NEEM $r > 0$ MET $B(g(\alpha), r) \subseteq g[G]$
    DAN $B(-g(\alpha), r) \cap g[G] = \emptyset$
    ALS $g(z) \in B(-g(\alpha), r)$ DAN $-g(z) \in B(g(\alpha), r)$
    DUS ER IS EEN w MET $-g(z) = g(w)$
    MAAR DAN $z = w$ EN $-g(z) = g(z) = 0$
    TEGENSPRAAK WANT $g(z) \neq 0$

- WE ZIEN VOOR ALLE $z \in G$ GELDT
$|g(z) + g(\alpha)| > 2$
EN DUS $\dfrac{1}{|g(z)+g(\alpha)|} > \dfrac{1}{2}$

EN OOK
$$\left| \frac{1}{g(z)+g(\alpha)} - \frac{1}{2g(\alpha)} \right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

- NEEM $f(z) = \left(\dfrac{1}{g(z)+g(\alpha)} - \dfrac{1}{2g(\alpha)} \right) \cdot \dfrac{2}{2}$

DAN GELDT $f(\alpha) = 0$
$|f(z)| < 1 \quad (z \in G)$

EN
$$f'(z) = \frac{2}{2} \cdot \frac{-g'(z)}{(g(z)+g(\alpha))^2}$$

EN $f'(\alpha) = \dfrac{2}{2} \cdot \dfrac{-g'(\alpha)}{4\,g(\alpha)^2} = \dfrac{-2 \cdot g'(\alpha)}{8 \cdot g(\alpha)^2}$

VERMENIGVULDIG MET $\dfrac{\overline{f'(\alpha)}}{|f'(\alpha)|}$.

NB g EN DUS f IS INJECTIEF: $f'(\alpha) \neq 0$

DUS $h(z) = \dfrac{\overline{f'(\alpha)}}{|f'(\alpha)|} \cdot f(z)$

DAN $h(\alpha) = 0$; h IS INJECTIEF;
$h[G] \subseteq E$
$h'(\alpha) = \dfrac{\overline{f'(\alpha)} \cdot f'(\alpha)}{|f'(\alpha)|} = |f'(\alpha)| > 0.$

WE HEBBEN $h \in F$
- $0 \in \overline{F}$ WANT $\frac{1}{n} h \to 0$ UNIFORM.
- STEL $f_n \to f$ IN B EN $f_n \in F$ $(n \in \mathbb{N})$
  - $f(\alpha) = 0$ $f'(\alpha) \geq 0$ ZEKER
    WANT $f_n' \to f'$ VOOR ANALYTISCHE FUNCTIES
  - STEL f IS NIET DE NULFUNCTIE
    TE BEWIJZEN: f IS INJECTIEF.

NEEM $z_1 \neq z_2$ IN G

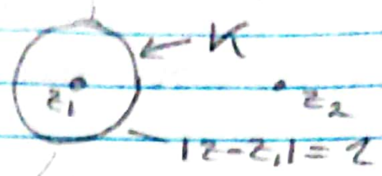
– $\{z : f(z) = f(z_2)\}$ IS DISCREET IN G

NEEM $r > 0$ ZO DAT

ALS $0 < |z - z_1| \le 2r$ DAN $f(z) \neq f(z_2)$

WE WILLEN OOK

DAT $f(z_1) \neq f(z_2)$



$w = f(z_2)$

$w_n = f_n(z_2)$ $\qquad \delta = \min\{|f(z) - f(z_2)| : |z - z_1| = r\}$

ER GELDT $f_n(z) - w_n \to f(z) - w$
UNIFORM OP K

NEEM N ZO DAT VOOR $n \ge N$

$|(f_n(z) - w_n) - (f(z) - w)| < \frac{1}{2}\delta$ (OP K)

$< |f(z) - w|$

ROUCHÉ: VOOR $n \ge N$ HEBBEN

$f_n(z) - w_n$ EN $f(z) - w$

EVENVEEL NULPUNTEN BINNEN K.

– f_n IS INJECTIEF DUS $f_n(z) - w_n$

HEEFT GEEN NULPUNTEN BINNEN K

$f(z) - w$ HEEFT ER OOK GEEN

– IHB $f(z_1) - w \neq 0$

DWZ $f(z_1) \neq f(z_2)$

WE ZIEN: f IS INJECTIEF DUS $f'(\alpha) > 0$.

DUS $F \cup \{0\}$ IS COMPACT EN DE FUNCTIE

$f \mapsto f'(\alpha)$

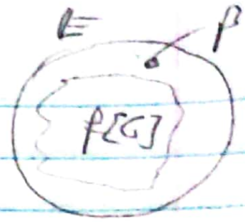
IS CONTINU [FORMULE VAN CAUCHY]

NEEM $f \in F$ MET $f'(\alpha)$ MAXIMAAL

DAN $f \neq 0$ WANT WE WETEN $F \neq \emptyset$

DUS f IS INJECTIEF

TE BEWIJZEN $f[G] = E$.



NEEM $\beta \in \mathbb{E} \setminus f[G]$
(WE HOPEN OP EEN TEGENSPRAAK ....)

DEFINIEER $\varphi_\beta(z) = \dfrac{z-\beta}{\bar\beta z - 1}$

$\varphi_\beta : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ IS BIJECTIEF, ANALYTISCH

- $\varphi_\beta \circ \varphi_\beta = ID$
- $\varphi_\beta(0) = \beta$ EN $\varphi_\beta(\beta) = 0$
- $\varphi'_\beta(z) = \dfrac{1\cdot(\bar\beta z - 1) - (z-\beta)\bar\beta}{(\bar\beta z - 1)^2} = \dfrac{\bar\beta z - 1 - \bar\beta z + |\beta|^2}{(\bar\beta z - 1)^2} = \dfrac{|\beta|^2 - 1}{(\bar\beta z - 1)^2}$

$\varphi'_\beta(\beta) = \dfrac{1}{|\beta|^2 - 1}$

LAAT $g = \varphi_\beta \circ f$ DAN $g \in H(G)$
EN $g(z) \neq 0$ OP G

NEEM $h \in H(G)$ MET $h^2 = g$

WE WETEN $f[G] \subseteq \mathbb{E}$
DUS $g[G] \subseteq \mathbb{E}$
EN DUS $h[G] \subseteq \mathbb{E}$

DEFINIEER
$$k(z) = \frac{h(z) - h(\alpha)}{\overline{h(\alpha)}\cdot h(z) - 1} \quad : \quad k = \varphi_{h(\alpha)} \circ h$$

- g EN h ZYN INJECTIEF, k DUS OOK
- $k(\alpha) = 0$ VUL MAAR IN
- $k'(\alpha) = \varphi'_{h(\alpha)}(h(\alpha)) \cdot h'(\alpha)$

$$= \frac{h'(\alpha)}{|h(\alpha)|^2 - 1}$$

MEER REKENWERK

- $h(\alpha)^2 = \varphi_\beta(f(\alpha)) = \varphi_\beta(0) = \beta$
- $2h(\alpha)\cdot h'(\alpha) = \varphi'_\beta(f(\alpha))\cdot f'(\alpha)$
$= \varphi'_\beta(0)\cdot f'(\alpha)$
$= (|\beta|^2 - 1)\cdot f'(\alpha)$

DUS $h'(\alpha) = \dfrac{(|\beta|^2 - 1)\cdot f'(\alpha)}{2h(\alpha)}$

SAMEN NEMEN

$$k'(\alpha) = \frac{h'(\alpha)}{|h(\alpha)^2|-1} \overset{h(\alpha)^2=\beta}{=} \frac{h'(\alpha)}{|\beta|-1}$$

$$= \frac{1}{|\beta|-1} \cdot \frac{|\beta|^2-1}{2h(\alpha)} \cdot f'(\alpha)$$

$$= \frac{|\beta|+1}{2h(\alpha)} \cdot f'(\alpha)$$

OF $$|k'(\alpha)| = \frac{|\beta|+1}{2\sqrt{|\beta|}} \cdot f'(\alpha).$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{|\beta|} + \frac{1}{\sqrt{|\beta|}}\right) \cdot f'(\alpha)$$

$$> 1 \cdot f'(\alpha)$$

NB ALS $a, b \geq 0$ DAN $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$
EN $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b)$
ALLEEN ALS $a = b$

DUS $$1 = \sqrt{1} = \sqrt{\sqrt{|\beta|} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\beta|}}} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{|\beta|} + \frac{1}{\sqrt{|\beta|}}\right)$$

ZELFDE TRUC ALS DAARNET

$$l(z) = k(z) \cdot \frac{\overline{k'(\alpha)}}{|k'(\alpha)|} \in F$$

EN $l'(\alpha) > f'(\alpha)$ TEGENSPRAAK

Scanned with CamScanner