AM 3590 2021-12-21

STELLING VAN BANACH & TARSKI

(1924) SUR LA DECOMPOSITION DES ENSEMBLES EN PARTIES RESPECTIVEMENT CONGRUENTES.

ALGEMENE BESCHOUWINGEN IN METRISCHE RUIMTEN

(M, d) EEN METRISCHE RUIMTE

A EN B DEELVERZ VAN M

ZIJN <u>CONGRUENT</u>: ALS ER EEN BIJECTIE $\varphi: A \to B$ IS DIE OOK EEN ISOMETRIE IS.

NOTATIE $A \cong B$

=

TEGENWOORDIG KIJKT MEN NAAR GROEPSWERKINGEN

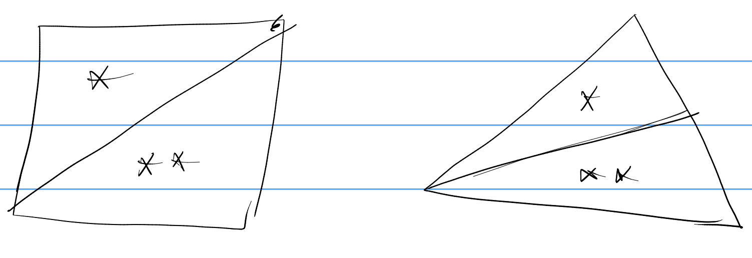
$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto gx$$
$$(e, x) \longmapsto x$$
$$(gh, x) \longmapsto (gh)x = g(hx)$$

$X = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \ldots$ G DE ISOMETRIEËN

$$(f, x) \longmapsto f(x) \quad (fx)$$

$$A \cong B \iff (\exists g \in G)(\{ga : a \in A\} = B)$$

=



$A =_f B$ "EQUIVALENT VIA EINDIGE DECOMPOSITIES"

ALS ER $A_1, \ldots, A_k$ EN $B_1, \ldots, B_k$ BESTAAN MET

- $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$
- $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j \quad (i \neq j)$
- $A_i \cong B_i$

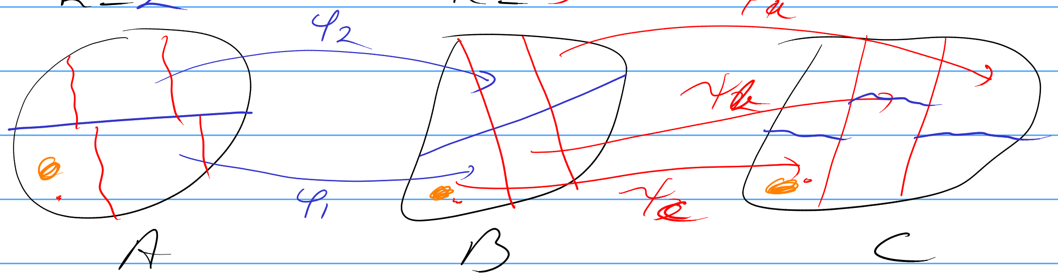
$\cong$ IS EEN EQUIVALENTIERELATIE

① $A =_f A$

② $A =_f B \Rightarrow B =_f A$

③ $A =_f B$ EN $B =_f C \Rightarrow A =_f C$

$k = 2$ $\quad k = 3$



$A = A_1 \cup A_2 \quad B = B_1 \cup B_2$

$B = B_a \cup B_b \cup B_c \quad C = C_a \cup C_b \cup C_c$

④ ALS $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ EN $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$

MET $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j \quad (i \neq j)$

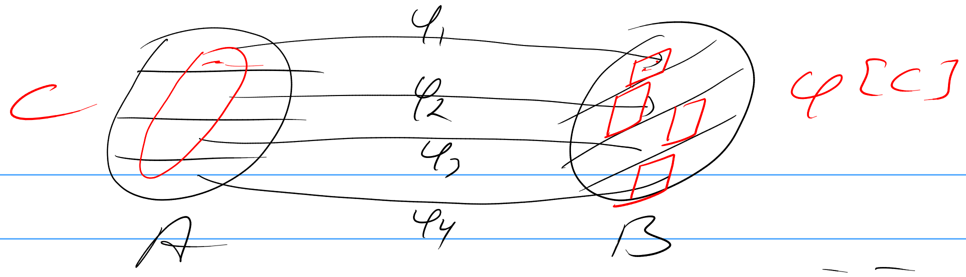
EN $A_i =_f B_i$ ALLE i

DAN $A =_f B$

[COMBINEREN]

⑤ ALS $A =_f B$ DAN IS ER EEN BIJECTIE $\varphi : A \to B$ ZÓ DAT VOOR ALLE $C \subseteq A$ GELDT

$C =_f \varphi[C]$

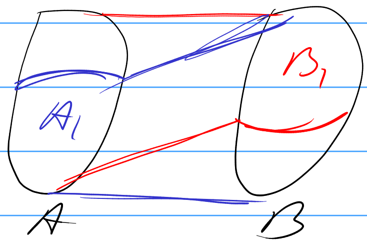


COMBINEER DE φ_i TOT ÉÉN BIJECTIE φ

(6) STEL $A =_\# B$ EN $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$
MET $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$
DAN IS B TE SCHRIJVEN ALS $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$
MET $A_i =_\# B_i$ (ALLE i)
GEBRUIK (5): $\varphi : A \to B$ ZÓ DAT
$C =_\# \varphi[C]$ ALS $C \subseteq A$
NEEM $B_i = \varphi[A_i]$ KLAAR

(7) ALS $A =_\# B$ DAN HOORT BIJ DEELVERZ C VAN A EEN $D \subseteq B$
ZÓ DAT $C =_\# D$ EN ALS $C \neq A$ DAN $D \neq B$.

(8) ALS $A_1 \subseteq A$ EN $B_1 \subseteq B$
EN OOK $A =_\# B_1$ EN $A_1 =_\# B$
DAN $A =_\# B$

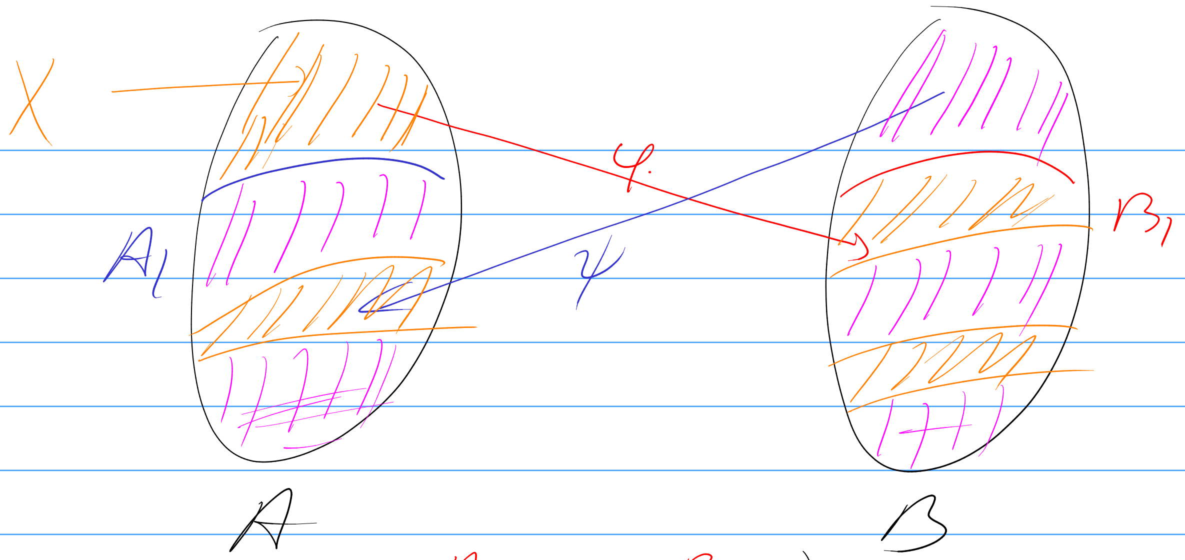


SPECIAAL GEVAL:
STELLING VAN
DEDEKIND/CANTOR/SCHROEDER/
BERNSTEIN

STEL $\varphi : A \to B$ IS INJECTIEF
EN $\psi : B \to A$ IS INJECTIEF
DAN IS ER EEN BIJECTIE $\phi : A \to B$

$(0,1) \subseteq [0,1)$ $[0,1) \longrightarrow [\frac{1}{2},1) \subseteq (0,1)$

$x \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$



$$\left.\begin{array}{l} \varphi : A \longrightarrow B_1 \\ \psi : B \longrightarrow A_1 \end{array}\right) \text{ UIT } (5)$$

$X = A \setminus A_1$

X^+ IS DE <u>KLEINSTE</u> VERZ $X^+ \subseteq A$

MET $-\ X \subseteq X^+$

$-\ \psi[\varphi[X^+]] \subseteq X^+$ IN A

[OPGAVE DIE IS ER

$X^+ = \bigcap\{Z : Z \subseteq A,\ X \subseteq Z,\ \psi[\varphi[Z]] \subseteq Z\}$]

$Y = A \setminus X^+$ IN A

$U = \varphi[X^+]$ $\qquad V = \psi^{-1}[Y]$

$A = X^+ \cup Y$ $\qquad B = U \cup V$

$X^+ \cap Y = \emptyset$ $\qquad U \cap V = \emptyset$

$U = \varphi[X^+]$ $\qquad Y = \psi[V]$

EN

$X^+ =_f U$ $\qquad V =_f Y$

(4) : $(X^+ \cup Y) =_f (U \cup V)$

(9) IN HET BIJZONDER

STEL $C \subseteq B \subseteq A$

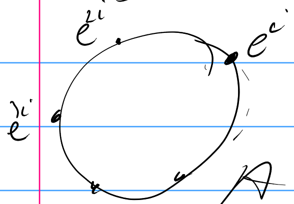
EN $C =_f A$

DAN $C =_f B$, $B =_f A$

[(8) MET $A =_f C \subseteq B$ $\quad B =_f B \subseteq A$]

(10) STEL $A =_f (A \cup B_i)$ $\quad 1 \le i \le k$

DAN $A =_f (A \cup \bigcup_{i=1}^{k} B_i)$



$A = S^1 \qquad B = \{2\}$

$A =_f (A \cup B)$

$A_1 = \{ e^{in} : n = 1, 2, 3, \dots \}$ VERSCH.

$A_2 = \{1\}$

$A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_2)$

$B_3 = A_3$

$B_2 = A_1 \cup A_2 \cong A_1$ DRAAI OVER 1 RAD

$B_1 = \{2\} \cong \{1\}$

(i) ALLES DISJUNCT

INDUCTIE: $n = 1$ GEGEVEN

$n \to n+1$: $A =_f A \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ (I.V.)

$A =_f A \cup B_{n+1}$ (GEG)

TRANSITIVITEIT + DISJUNCT

$A =_f A \cup B_{n+1} =_f A \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i$

(ii) ALGEMEEN

$B_1' = B_1 \setminus A$, $B_i' = B_i \setminus (A \cup \bigcup_{j<i} B_j)$

$A \subseteq A \cup B_i' \subseteq A \cup B_i$

DUS $A =_f A \cup B_i'$

GEVAL (i) TOEPASSEN.

NAAR $\mathbb{R}^3$

STEL S IS EEN BOL IN $\mathbb{R}^3$

DAN ZIJN ER $A_1, A_2 \subseteq S$

MET – $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

– $S =_f A_1$ EN $S =_f A_2$

VOOR HET GEMAK

$$S = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

$p = (0,0,0)$ MIDDELPUNT.

PAS DE "BEROEMDE PARADOX VAN HAUSDORFF" TOE:

$$O = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

IS TE VERDELEN IN VIER VERZ'N

B', C', D' EN E'

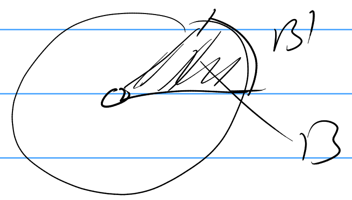
– E' IS AFTELBAAR

– B', C' EN D' VOLDOEN AAN

– $B' \cong (C' \cup D')$

– $B' \cong C' \cong D'$

[VRIJDAG]



$B = \{tx : x \in B', 0 < t \leq 1\}$

C $\qquad C'$

D $\qquad D'$

E $\qquad E'$

$$S = B \cup C \cup D \cup E \cup \{p\} \quad \text{PARTITIE}$$

$$B \cong C \cup D$$

$$B \cong C \cong D$$

ER IS EEN AFT $F' \subseteq B' \cup C' \cup D'$

CONGRUENT MET E'

ROTATIE ϱ MET $\varrho[E'] \cap E' = \emptyset$

$F' = g[E']$

$F = F'$ plus deeltjes

$F \subseteq B \cup C \cup D$, $F \cong E$

WE HEBBEN

$B =_f C \cup D$ en $B =_f D$

dus $B =_f B \cup C$

ook $B \cup C \cong B \cup C \cup D$

dus $B =_f B \cup C \cup D$

$A_1 = B \cup E \cup \{p\}$

$A_1 =_f (B \cup C \cup D) \cup E \cup \{p\} = S_1$

Op dezelfde manier

$C =_f B \cup C \cup D$ $\quad D =_f B \cup C \cup D$

$F \subseteq B \cup C \cup D$

met (7) vinden we $G \subseteq C$

met $F =_f G$ dus $E =_f G$

$F \neq B \cup C \cup D$ dus $G \neq C$

Neem $q \in C \setminus G$.

Maak

$A_2 = D \cup G \cup \{q\}$

$=_f B \cup E \cup \{p\}$

$= A_1 =_f S$

$A_1 \cap A_2 \subseteq (B \cup E \cup \{p\}) \cap (D \cup C) = \emptyset$

Stel S_1 en S_2 zijn bollen met dezelfde straal!

Dan $S_1 =_f S_1 \cup S_2$

Neem A_1 en A_2 in S_1 met

$S_1 =_f A_1$ $\quad S_1 =_f A_2$

$S_2 =_f A_1$ $\quad S_2 =_f A_2$

via (7) er is $B \subseteq A_2$: $B =_f S_2 \setminus S_1$

- $A_1 \cup B =_7 S_1 \cup (S_2 \setminus S_1) = S_1 \cup S_2$
- $A_1 \cup B \subseteq S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$

PAS 9 TOE: $S_1 =_7 S_1 \cup S_2$.