AM35go 2021-12-21

BANACH-TARSKI PARADOX

STEFAN BANACH EN ALFRED TARSKI
SUR LA DÉCOMPOSITION DES ENSEMBLES DE POINTS EN PARTIES RESPECTIVEMENT CONGRUENTES.

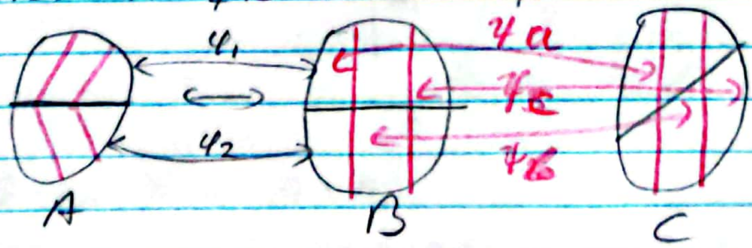
- ALGEMENE BESCHOUWINGEN OVER METRISCHE RUIMTEN

(X,d) EEN METRISCHE RUIMTE
$A, B \subseteq X$ ZIJN <u>CONGRUENT</u> ALS ER EEN ISOMETRIE $\varphi: A \to B$ BESTAAT.
NOTATIE $A \cong B$

WE DEFINIËREN VOOR $A, B \subseteq X$
$A =_f B$ "EQUIVALENT VIA EINDIGE DECOMPOSITIES"
ALS ER VERZAMELINGEN $A_1, \dots, A_m$ EN $B_1, \dots, B_m$ BESTAAN MET

- $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ EN $B = \bigcup_{i=1}^m B_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$ ALS $i \neq j$
- $A_i \cong B_i$ VOOR ELKE i

① ALS $A = B$ OF $A \cong B$ DAN $A =_f B$
② ALS $A =_f B$ DAN $B =_f A$.
③ ALS $A =_f B$ EN $B =_f C$ DAN $A =_f C$



$A = A_1 \cup A_2$ $B = B_1 \cup B_2$ $C = C_a \cup C_b \cup C_c$
$B = B_a \cup B_b \cup B_c$

$A_{i,a} = \varphi_i^{-1}[B_a \cap B_i]$ $C_{i,a} = \psi_a[B_i \cap B_a]$
$A_{i,b} = \varphi_i^{-1}[B_b \cap B_i]$ $C_{i,b} = \psi_b[B_i \cap B_b]$
$A_{i,c} = \varphi_i^{-1}[B_c \cap B_i]$ $C_{i,c} = \psi_c[B_i \cap B_c]$

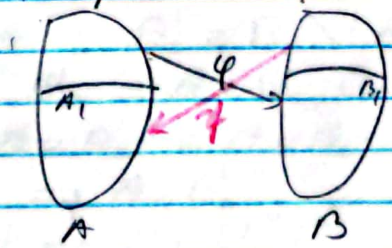
(4) Als $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ en $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$
met $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$ (als $i \neq j$)
en $A_i =_f B_i$ alle i
Dan $A =_f B$
[Combineren]

(5) Als $A =_f B$ dan bestaat een bijectie $\varphi : A \to B$ zodat voor alle $C \subseteq A$ geldt $C =_f \varphi[C]$.
Stel $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ en $B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$
met isometrieën $\varphi_i : A_i \to B_i$
combineer de φ_i tot een bijectie $\varphi : A \to B$

(6) Stel $A =_f B$ en $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ met de A_i disjunct
dan is B te schrijven als $\bigcup_{i=1}^{m} B_i$ met de B_i disjunct zodat $A_i =_f B_i$ voor alle i.

(7) Als $A =_f B$ dan hoort bij elke deelverzameling C van A een deelverzameling D van B zodat
- $C =_f D$ en als $C \neq A$ dan $D \neq B$

(8) Als $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, $A =_f B_1$ en $B =_f A_1$
Dan $A =_f B$.
Stelling van Banach: dit volgt uit (4) en (5).
Neem bijecties $\varphi : A \to B_1$ en $\psi : B \to A_1$
als in (5)



Stel $X = A \setminus A_1$
- neem de kleinste verzameling $X^+ \subseteq A$
met • $X \subseteq X^+$ en • $\psi[\varphi[X^+]] \subseteq X^+$
[opgave: die bestaat]
- en $Y = A \setminus X^+$
verder $U = \varphi[X^+]$ en $V = \psi^{-1}[Y]$

DAN GELDT
$$A = X^+ \cup Y \qquad X^+ \cap Y = \emptyset$$
$$B = U \cup V \qquad U \cap V = \emptyset$$
$$U = \varphi[X^+]$$
$$Y = \psi[V]$$
[OPGAVE: GA NA]

DUS, WEGENS ⑤ $X^+ =_f U$ EN $Y =_f V$

PAS NU ④ TOE $(X^+ \cup Y) =_f (U \cup V)$.

⑨ IN HET BIJZONDER

ALS $C \subseteq B \subseteq A$ EN $A =_f C$

DAN $A =_f B$ EN $B =_f C$

[WANT $A =_f C \subseteq B$ EN $B =_f B \subseteq A$]

⑩ STEL $A =_f (A \cup B_i)$ VOOR $1 \leq i \leq n$

DAN $A =_f (A \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i)$

ⓐ ALLE VERZAMELINGEN DISJUNCT

INDUCTIE $n=1$: AANNAME

$n \to n+1$ WE HEBBEN
$$A =_f A \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$
$$A =_f A \cup B_{n+1}$$
$$A \cap B_{n+1} = \emptyset = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$
DUS $A =_f A \cup B_{n+1} =_f A \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i$.

ⓑ ALGEMEEN
$$B_1' = B_1 \setminus A \quad ; \quad B_i' = B_i \setminus (A \cup \bigcup_{j<i} B_j) \quad i \geq 2$$
DUS $A \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i' = A \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

OOK $A \subseteq A \cup B_i' \subseteq A \cup B_i$

VIA ⑨ $A =_f A \cup B_i'$

GEVAL ⓐ: $A =_f A \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i' = A \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

⑪ ALS $A_1 =_f A_2$, $B_1 =_f B_2$, $(A_1 \cup A_2) =_f (B_1 \cup B_2)$,

EN $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$

DAN $A_1 =_f B_1$

WE KUNNEN, WEGENS ⑥ SCHRIJVEN

$A_1 \cup A_2 = B_1' \cup B_2'$ MET $B_1' =_f B_1$ EN $B_2' =_f B_2$

MAAR $B_1 =_f B_2$ DUS WEGENS TRANSITIVITEIT ③:
$$B_1' =_f B_2'$$

WE ZIJN DUS IN HET GEVAL $A_1 \cup A_2 = B_1' \cup B_2'$
MET $A_1 =_f A_2$ EN $B_1' =_f B_2'$
TE BEWIJZEN DAT $A_1 =_f B_1'$ (OF $A_1 =_f B_2'$)
[KOMT LATER RESULTAAT VAN KURATOWSKI]

(12) STEL $A_1, \dots, A_{2^n}$ EN $B_1, \dots, B_{2^n}$
ZIJN DISJUNCT MET
- $A_1 =_f A_k$ EN $B_1 =_f B_k$ $1 \leq k \leq 2^n$
- $\bigcup_{i=1}^{2^n} A_i =_f \bigcup_{i=1}^{2^n} B_i$

DAN GELDT $A_1 =_f B_1$
INDUCTIE $n=1$: (11)
$n \to n+1$ $\bigcup_{i=1}^{2^n} A_i$, $\bigcup_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{2^n} B_i$, $\bigcup_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} B_i$

(13) STEL $A =_f B$ EN A ZIT IN EEN FAMILIE $\mathcal{K}$
MET : (i) $X, Y \in \mathcal{K} \to X \cup Y \in \mathcal{K}$
(ii) $X \in \mathcal{K}, Y \leq X \to Y \in \mathcal{K}$
(iii) $X \in \mathcal{K}, Y \cong X \to Y \in \mathcal{K}$
DAN OOK $B \in \mathcal{K}$.
STEL $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ EN $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ DISJUNCT
MET $A_i \cong B_i$
(ii) GEEFT $A_i \in \mathcal{K}$ VOOR ALLE i
(iii) GEEFT $B_i \in \mathcal{K}$ VOOR ALLE i
(i) + INDUCTIE: $B \in \mathcal{K}$.

(14) $A =_f B$ EN A NERGENS DICHT DAN B NERGENS DICHT
(15) $A =_f B$ EN A HEEFT MAAT NUL DAN HEEFT B
OOK MAAT NUL.

NAAR $\mathbb{R}^3$

ELKE BOL S HEEFT TWEE DISJUNCTE
DEELVERZAMELINGEN A_1 EN A_2
ZODAT $S =_f A_1$ EN $S =_f A_2$
ZIJ p HET MIDDELPUNT VAN S.
VOOR HET GEMAK $p = (0,0,0)$
$$S = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

GEBRUIK DE "PARADOX VAN HAUSDORFF"
HET BOLOPPERVLAK O KAN VERDEELD WORDEN IN VIER VERZAMELINGEN
B', C', D' EN E'
MET - E' AFTELBAAR
- B', C' EN D' VOLDOEN AAN
$B' \cong C' \cup D'$ EN $B' \cong C' \cong D'$
[KOMT LATER]
NU: $B = \{tx : x \in B' \wedge 0 < t \leq 1\}$ SECTOR OVER B'
C : SECTOR OVER C'
D SECTOR OVER D'
E SECTOR OVER E'
PARTITIE VAN S: $B \cup C \cup D \cup E \cup \{p\}$
MET $B \cong C \cup D$
$B \cong C \cong D$
ER BESTAAT EEN $F \subseteq B \cup C \cup D$ MET $F \cong E$
NEEM EEN ROTATIE ρ MET $\rho[E'] \cap E' = \emptyset$
ZET $F' = \rho[E']$ EN F DE SECTOR OVER F'.
WE HEBBEN
$B =_f C \cup D$ EN $B \cong D$ DUS $B =_f C \cup B$
EN OOK $B \cup C \cong B \cup C \cup D$
DUS $B =_f B \cup C \cup D$ [TRANSITIVITEIT]
NEEM
$A_1 = B \cup E \cup \{p\}$
DAN $A_1 =_f S$
WE HEBBEN OOK
$C =_f B \cup C \cup D$ EN $D =_f B \cup C \cup D$
MET $F \subseteq B \cup C \cup D$ EN (7) VINDEN WE $G \subseteq C$
ZÓ DAT $F =_f G$ EN DUS $E =_f G$
NB B', C' EN D' ZIJN NIET AFTELBAAR
DUS $G \neq C$. WANT $F \neq (B \cup C \cup D)$
NEEM $q \in C \setminus G$ EN ZET
$A_2 = D \cup G \cup \{q\}$
DAN $B =_f D$, $E =_f G$, $\{p\} \cong \{q\}$ DUS $A_2 =_f S$.

EN OOK

$$A_1 \cap A_2 = ((B \cup E \cup s(P)) \cap (D \cup G \cup s(Q))$$
$$\subseteq (B \cup E \cup s(P)) \cap (D \cup C)$$
$$= \emptyset.$$

STELLING

STEL S_1 EN S_2 ZIJN BOLLEN MET GELIJKE STRAAL

DAN $S_1 =_f S_1 \cup S_2$

WE HEBBEN A_1 EN A_2 DISJUNCT IN S_1

MET $S_1 =_f A_1$ EN $S =_f A_2$

DUS OOK $S_2 =_f A_2$

VIA (7) EN IS $B \subseteq A_2$ ZÓ DAT $B =_f S_2 \setminus S_1$

DUS $A_1 \cup B =_f S_1 \cup (S_2 \setminus S_1) = S_1 \cup S_2$

$A_1 \cup B \subseteq S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$

EN MET (9) VINDEN WE

$S_1 =_f S_1 \cup S_2$.

LEMMA

STEL $A \subseteq \mathbb{R}^3$ IS BEGRENSD

EN ER IS EEN BOL S MET $S \subseteq A$

DAN $S =_f A$

A IS TOTAALBEGRENSD DUS

$A \subseteq \bigcup_{k=1}^m S_k$ ELKE S_k EEN BOL MET DEZELFDE STRAAL ALS S

WE WETEN $S =_f S \cup S_k$ VOOR ELKE k

EN DUS, VIA (10), $S =_f S \cup \bigcup_{k=1}^m S_k$

MAAR

$S \subseteq A \subseteq S \cup \bigcup_{k=1}^m S_k$

EN MET (9) VINDEN WE

$S =_f A$.

DE HOOFDSTELLING

LAAT A EN B BEGRENSDE DEEL-VERZAMELINGEN VAN $\mathbb{R}^3$ ZIJN MET NIET-LEEG INWENDIGE. DAN $A =_f B$

NEEM BOLLEN S_1 EN S_2 MET GELIJKE STRAAL ZÓ DAT $S_1 \subseteq A$ EN $S_2 \subseteq B$

DAN

$$A =_f S_1 \cong S_2 =_f B$$