AM 3590 2021-12-24

DINSDAG:

TWEE BOLLEN S_1 EN S_2 GELYKE STRAAL. DAN

$$S_1 =_f S_1 \cup S_2$$

HOEFT NIET DISJUNCT.

GEVOLG:

STEL $A \subseteq \mathbb{R}^3$ BEGRENSD EN NIET-LEEG INWENDIGE DVS ER IS EEN BOL S MET $S \subseteq A$.

DAN $S =_f A$

BEWYS

ER ZYN BOLLEN $S_1, \ldots, S_k$ MET DEZELFDE STRAAL ALS S ZÓ DAT

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S_i$$

DAN $S =_f S \cup S_i$ VOOR ALLE i

VIA 10 : $S =_f S \cup \bigcup_{i=1}^{k} S_i$

VIA 9 : $S =_f A$

WANT. $S \subseteq A \subseteq S \cup \bigcup_{i=1}^{k} S_i$

HOOFDSTELLING:

STEL A EN B ZYN BEGRENSD IN $\mathbb{R}^3$ MET NIET-LEEG INWENDIGE

DAN $A =_f B$.

ER ZYN BOLLEN S_1 EN S_2 MET GELYKE STRAAL ZÓ DAT $S_1 \subseteq A$ EN $S_2 \subseteq B$

DAN $A =_f S_1 \cong S_2 =_f B$

ERWT $=_f$ ZON

"DIE UNLÖSBARKEIT DES INHALTPROBLEMS"

HET IS NIET MOGELIJK $f : P(K) \to \mathbb{R}$ DE DEFINIËREN (K BOLOPPERVLAK KUGELFLÄCHE): POSITIEF

- $f(K) > 0$
- $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ $A \cap B = \emptyset$
- CONGRUENTE VER ZIJN ZELFDE WAARDE.

DIT BERUST OP HET MERKW. FEIT DAT EEN HELFT VAN K CONGRUENT KAN ZIJN MET ÉÉN-DERDE DEEL VAN K. VOOR ZO'N STUK, A, GELDT $f(A) = \frac{1}{2} f(K)$
EN $f(A) = \frac{1}{3} f(K)$

WE KUNNEN K SPLITSEN IN Q, A, B, EN C ZÓDAT

- Q IS AFTELBAAR
- $A \cong B \cup C$
- $A \cong B \cong C$

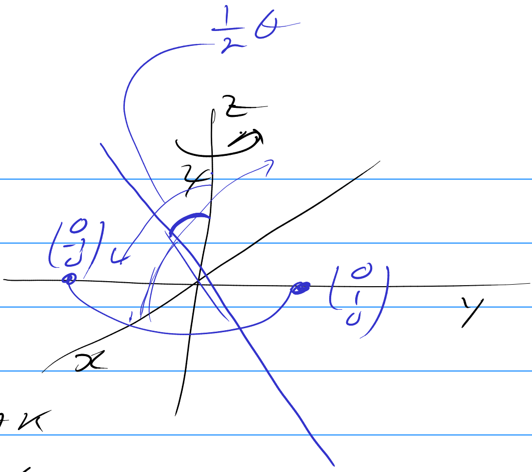
ZEKER $f(Q) = 0$

JE KUNT EEN ROTATIE R MAKEN ZÓ DAT $Q, RQ, R^2Q, R^3Q, \ldots$ ALLEMAAL DISJUNCT ZIJN

- $2f(Q) = f(Q) + f(RQ) \leq f(K)$
- $3f(Q) = f(Q) + f(RQ) + f(R^2Q) \leq f(K)$

$\Downarrow$

$f(Q) \leq \frac{1}{n} f(K)$ ALLE n.



TWEE ROTATIES:

ψ OVER $\frac{2\pi}{3}$ OM DE z-AS

DUS $\psi^3 = I$

φ OVER π OM EEN LIJN IN HET xz VLAK DIE EEN HOEK $\frac{1}{2}\theta$ MAAKT MET DE z-AS

DIE θ MOETEN WE ZORGVULDIG KIEZEN.

WE WILLEN DAT φ EN ψ VOLLEDIG ONAFH ZIJN:

ER GELDT $\varphi^2 = I = \psi^3$

VERDER WILLEN WE <u>NIETS</u>

ALLE MOGELIJKE SAMENSTELLINGEN VAN φ EN ψ VORMEN EEN GROEP

$\varphi = \varphi^{-1}$, $\psi^{-1} = \psi^2$

ONZE PRODUCTEN/SAMENSTELLINGEN ZIEN ER ZO UIT

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha: & \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi \cdots \varphi\psi^{m_k} \\ \beta: & \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi \cdots \psi^{m_k}\varphi \\ \gamma: & \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2} \cdots \varphi\psi^{m_k}\varphi \\ \delta: & \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi \cdots \psi^{m_k} \end{array}\right\}$$

$m_k = 1$ OF 2

NOOIT I

"$\gamma = \alpha\varphi$", "$\alpha = \gamma\varphi$"

"$\beta = \delta\varphi$", "$\delta = \beta\varphi$"

$\rightarrow$ $\varphi\alpha\varphi = \beta$ — $\varphi\beta\varphi = \alpha$ $\leftarrow$

ALS ER EEN FOUTE β IS $\beta = I$

DAN IS ER EEN FOUTE α.

$\rightarrow$ $\varphi\gamma\varphi = \delta$ $\quad \varphi\delta\varphi = \gamma$ KAN I ZIJN: γ

$\psi^{-m_1}\delta\psi^{+m_1}$ $\rightarrow$ $\varphi \cdots \varphi\psi^{m_k+m_1}$

$\varphi \cdots \varphi\psi^{\ell}$ MET I : α

EEN MACHT VAN ψ MINDER

INDUCTIE

WE CONCENTREREN ONS OP TYPE α

ψ HEEFT MATRIX $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ $\quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos\frac{2}{3}\pi$ $\quad \sin\frac{2}{3}\pi$

$\psi^2 = \psi^{-1}$ $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

φ HEEFT MATRIX. $\begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

! θ ZÓ UITMIKKEN DAT $\overline{\text{GEEN}}$ PRODUCT VAN TYPE α ONS I OPLEVERT.

WAT DOET TYPE α MET $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$M_\psi \cdot M_\varphi$

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} -\lambda\cos\theta & \pm\mu & \lambda\sin\theta \\ \mp\mu\cos\theta & -\lambda & \pm\mu\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\varphi\psi^2 = \begin{pmatrix} -\lambda\cos\theta & \mp\mu & \lambda\sin\theta \\ \pm\mu\cos\theta & -\lambda & \pm\mu\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

HAUSDORFF!
ROTATIE ACHTER DE VECTOR

$x\varphi$

$x\psi$

$x\varphi\psi$

ÉÉN FACTOR $\begin{pmatrix} \lambda\sin\theta \\ \pm\mu\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ $\cos\theta$ $\cos\theta$

$\lambda(1-\lambda)$ $\quad \mu(1-\lambda)$

TWEE FACTOREN $\begin{pmatrix} \sin\theta\left((\lambda-\lambda^2)\cos\theta \pm\mu^2\right) \\ \sin\theta\left((\pm\lambda\mu\mp\mu)\cos\theta \pm\lambda\mu\right) \\ (1-\lambda)\cos^2\theta + \lambda \end{pmatrix}$

ALGEMEEN

POLYNOMEN IN $\cos\theta$

n FACTOREN

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\,(a_n \cos^{n-1}\theta + \cdots) \\ \sin\theta\,(b_n \cos^{n-1}\theta + \cdots) \\ c_n \cos^n\theta + \cdots \end{pmatrix}$$

$n+1$ FACTOREN

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\,(\underbrace{\lambda(c_n-a_n)}_{a_{n+1}}\cos^n\theta + \cdots) \\ \sin\theta\,(\pm\mu(c_n-a_n)\cos^n\theta + \cdots) \\ \underbrace{(c_n-a_n)}_{c_{n+1}}\cos^{n+1}\theta + \cdots \end{pmatrix}$$

$a_{n+1} = \lambda(c_n - a_n)$

$c_{n+1} = c_n - a_n$

$(c_{n+1} - a_{n+1}) = (1-\lambda)(c_n - a_n) = \frac{3}{2}(c_n - a_n)$

$= \cdots \left(\frac{3}{2}\right)^n$

EIS:

$c_n \cos^n\theta + \cdots \neq 1$ ALLE n.

SLECHTS $\leq n$ VERBODEN WAARDEN VOOR $\cos\theta$

IN TOTAAL AFT VEEL.

ER ZIJN HEEL VEEL GOEDE θS

WE VERDELEN DE GROEP G IN DRIE DELEN A_G, B_G EN C_G ZO DAT

- VOOR ELKE $g \in G$:
  $g \in A_G$ EN $g\varphi \in B_G \cup C_G$
  OF ANDERSOM
- VOOR ELKE $g \in G$:
  g, $g\psi$ EN $g\psi^2$ EERLIJK VERDEELD OVER A_G, B_G EN C_G
  ELK KRIJGT ER EENTJE

RECURSIE NAAR HET AANTAL FACTOREN

$\varphi\psi^2\varphi\psi$ HEEFT <u>VIER</u> FACTOREN: $\varphi, \psi^2, \varphi, \psi$

0 FACTOREN $\quad I$ IN A_G

1 FACTOR $\quad \varphi, \psi \in B_G$, $\psi^2 \in C_G$

$n \longrightarrow n+1$ • $\quad \rho \cdot \varphi \quad \rho$ EINDIGT IN ψ OF ψ^2

ALS $\quad \rho \in A_G \quad \rho \in B_G \quad \rho \in C_G$

DAN $\quad \rho\varphi \in B_G \quad \rho\varphi \in A_G \quad \rho\varphi \in A_G$

• $\quad \rho \cdot \psi$ OF $\rho \cdot \psi^2 \quad \rho$ EINDIGT op φ

ALS $\quad \rho \in A_G \quad \rho \in B_G \quad \rho \in C_G$

DAN $\quad \rho\psi \in B_G \quad \rho\psi \in C_G \quad \rho\psi \in A_G$

$\quad \rho\psi^2 \in C_G \quad \rho\psi^2 \in A_G \quad \rho\psi^2 \in B_G$

ρ WILLEKEURIG : $\quad \rho \in A_G \quad \rho\varphi \in B_G \cup C_G$

$\rho \in A_G$: $\rho = \sigma\varphi \quad \rho\varphi = \sigma \in B_G \cup C_G$ OF $\quad \rho\varphi \in A \quad \rho \in B_G \cup C_G$

IDEM $\quad \rho, \rho\psi, \rho\psi^2$ GELIJK VERDEELD

$\rho = \sigma\psi \quad \sigma\psi^2 , \sigma$

GELIJK VERDEELD

$\rho = \sigma\psi^2 \quad \sigma \quad \sigma\psi$

$Q = \{ x : (\exists \rho \in G)(x\rho = x) \}$

PER ρ TWEE PUNTEN: op DE ROTATIEAS

$P = K \setminus Q$ WORDT VERDEELD IN BANEN

$P_x = \{ x\rho : \rho \in G \}$

L ALLEMAAL VERSCHILLEND

KEUZEAXIOMA: NEEM $M \subseteq P$

ZO DAT $|M \cap P_x| = 1$ VOOR ALLE x

DAN $\quad P = \bigcup \{ M\rho : \rho \in G \}$

$\rho \neq \sigma \longrightarrow M\rho \cap M\sigma$

$A = \bigcup \{ M\rho : \rho \in A_G \}$

$B = \bigcup \{ M\rho : \rho \in B_G \}$

$C = \bigcup \{ M\rho : \rho \in C_G \}$

$A\varphi = B \cup C$ en $(B \cup C)\varphi = A$

$A\psi = B$, $B\psi = C$, $C\psi = A$

1978 $\theta = \pi/4$

$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi\psi \cdot \varphi\psi^2 \cdot \ldots$ —