OPGAVEN TOPOLOGIE (WEEK 5)

AM3590

Opgave 1. Verdeel de hoofdletters van het alfabet

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z

in (zo groot mogelijke) groepjes van onderling homeomorfe letters.

Opgave 2. Bewijs $\dim \mathbb{P} = 0$.

Opgave 3. Laat X een metrische ruimte zijn. Bewijs: als $\{F_i : i \leqslant n\}$ een eindige familie gesloten verzamelingen is met $\bigcap_{i\leqslant n} F_i = \emptyset$ dan bestaat een familie open verzamelingen, $\{O_i : i \leqslant n\}$ zó dat $F_i \subseteq O_i$ voor alle i, en $\bigcap_{i\leqslant n} \overline{O_i} = \emptyset$.

Opgave 4. Bewijs dat een 3-simplex homeomorf is met de 3-kubus $[0,1]^3$. *Hint*: Neem het 3-simplex $[\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ in $\mathbb{R}^3$, waarbij $\mathbf{0}$ de nulvector is en de $\boldsymbol{e}_i$ de standaardbasisvectoren. Dit zit in de 3-kubus (teken een plaatje!). Neem de barycentrische onderverdeling van $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$; die geeft zes driehoeken, en daarmee een verdeling van het simplex in zes 3-simplices. Verdeel op een dergelijke manier de kubus in zes 3-simplices met telkens $\mathbf{0}$ en $(1,1,1)$ en twee van de zes andere hoekpunten (telkens aanliggende paren). Definieer het homeomorfisme stuksgewijs op elk simplex (op elk simplex kun je een lineaire afbeelding gebruiken).

Opgave 5. Neem aan dat F een gesloten deelruimte van de metrische ruimte X is met $\dim F \leqslant n$. Laat $(A_0, B_0), \ldots, (A_n, B_n)$ een $n+1$-tal paren disjuncte gesloten verzamelingen zijn.

a. Bewijs dat er partities $P_0, \ldots, P_n$ in X bestaat, P_i tussen A_i en B_i, zó dat $F \cap \bigcap_{i=0}^n P_i = \emptyset$.

b. Bewijs dat er paren open verzamelingen $(U_0, V_0), \ldots, (U_n, V_n)$ bestaan zó dat $A_i \subseteq U_i$, $B_i \subseteq V_i$, en $\overline{U_i} \cap \overline{V_i} = \emptyset$ voor alle i, en $\bigcap_{i=0}^n F \setminus (U_i \cup V_i) = \emptyset$. *Hint*: Pas Opgave 3 toe op $\{F, P_0, \ldots, P_n\}$. en trek $\overline{O_i}$ af van de omgevingen van A_i en B_i die samen het complement van P_i vormen.

Opgave 6. Laat X een metrische ruimte zijn en $n \in \mathbb{N}$. Laat $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$ een rij gesloten verzamelingen zijn zó dat $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ en $\dim F_k \leqslant n$ voor alle k. Bewijs dat $\dim X \leqslant n$. Werk de volgende schets uit tot een volwaardig bewijs.

Laat $(A_0, B_0), \ldots, (A_n, B_n)$ een $n+1$-tal paren disjuncte gesloten verzamelingen zijn. Maak, recursief, voor iedere k een $n+1$-tal paren open verzamelingen $(U_{k,0}, V_{k,0}), \ldots, (U_{k,n}, V_{k,n})$ met

- $A_i \subseteq U_{k,i}$, $B_{k,i} \subseteq V_{k,i}$, en $\overline{U}_{k,i} \cap \overline{V}_{k,i} = \emptyset$.
- $\overline{U}_{k,i} \subseteq U_{k+1,i}$ en $\overline{V}_{k,i} \subseteq V_{k+1,i}$.
- $\bigcap_{i=0}^n F_k \setminus (U_{k,i} \cup V_{k,i}) = \emptyset$.

Pas hierbij Opgave 5(b) toe.

Laat zien dat aan het eind $U_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{k,i}$ en $V_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_{k,i}$ een partitie P_i tussen A_i en B_i bepalen, en dat $\bigcap_{i=0}^n P_i = \emptyset$.