OPGAVEN TOPOLOGIE (WEEK 10)

AM3590

Opgave 1. Een bekende puzzel: Het Afsluiting-Complementprobleem van Kuratowski. In deze opgave noteren we de afsluiting van een verzameling A als A^- en het complement als A^c. Zo kunnen we herhaald en gemengd toepassen van afsluiting en complement eenvoudig noteren, bijvoorbeeld $A^{-c-ccc--}$.

a. Toon aan dat op deze manier uit een verzameling A ten hoogste veertien verschillende verzamelingen gemaakt kunnen worden. *Hint*: Bedenk dat $A^{--} = A^-$ en $A^{cc} = A$ (en dus $A^{-c-ccc--} = \ldots$) en bewijs dat $A^{-c-c-c-} = A^{-c-}$.

b. Maak een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ waarbij alle veertien mogelijkheden optreden.

Opgave 2. Zij X de volgende deelverzameling van het vlak (teken een plaatje):

$$\{(0,0)\} \cup \{(2^{-m}, 0) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{(2^{-m}, 2^{-n}) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

Definieer lokale bases als volgt:

- $\mathcal{B}_{(2^{-m},2^{-n})} = \big\{\{(2^{-m}, 2^{-n})\}\big\}$
- $\mathcal{B}_{(2^{-m},0)} = \{B(m,k) : k \in \mathbb{N}\}$, waarbij $B(m,0),k) = \{(2^{-m}, 0)\} \cup \{(2^{-m}, 2^{-n}) : n \geqslant k\}$.
- $\mathcal{B}_{(0,0)} = \{B(f,k) : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}\}$, waarbij

$$B(f,k) = \{(0,0)\} \cup \{(2^{-m}, 0) : m \geqslant k\} \cup \{(2^{-m}, 2^{-n}) : m \geqslant k, n \geqslant f(m)\}$$

(teken een plaatje).

a. Bewijs dat dit een legale toekenning van lokale bases is.

b. Zij $A = \{(2^{-m}, 2^{-n}) : m, n \in \mathbb{N}\}$. Laat zien dat $(0,0) \in \operatorname{cl} A$ maar dat er *geen* rij in A is die naar $(0,0)$ convergeert.

Opgave 3. Maak op $\mathbb{R}$ een topologie τ_b door aan de gewone topologie τ de verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ als extra open verzameling toe te voegen. Dus $\mathcal{S} = \tau \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ is een subbasis voor τ_b.

a. Ga na: als $q \in \mathbb{Q}$ dan is $\{(q - r, q + r) : r > 0\}$ een lokale basis voor τ_b in q en als $p \notin \mathbb{Q}$ dan is $\{(p - r, p + r) \setminus \mathbb{Q} : r > 0\}$ een lokale basis voor τ_b in p.

b. Bewijs: $(\mathbb{R}, \tau_b)$ is niet regulier.

Opgave 4. In $\mathbb{R}^2$ definiëren we een deelverzameling P, als volgt. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ nemen we $H_n = [0,1] \times \{2^{-n}\}$ en verder $H_\infty = (0,1] \times \{0\}$.

Dan is P gelijk aan de vereniging $H_\infty \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

a. Teken een plaatje van P.

Op P definiëren we een topologie τ door lokale bases af te spreken.

- Als $\langle x, y\rangle \in P$ en $x, y > 0$ dan $\mathcal{B}_{\langle x,y\rangle} = \big\{\{\langle x, y\rangle\}\big\}$; dus $\{\langle x, y\rangle\}$is open.
- Als $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathcal{B}_{\langle 0,2^{-n}\rangle} = \{H_n \setminus F : F \text{ is eindig en } \langle 0, 2^{-n}\rangle \notin F\}$.
- Als $x \in (0,1]$ dan $\mathcal{B}_{\langle x,0\rangle} = \big\{P \cap \big(\{x\} \times [0, 2^{-n})\big) : n \in \mathbb{N}\big\}$.

(Teken plaatjes.)

b. Ga na dat dit een goede toekenning van lokale bases is.

c. Toon aan dat elk element van elke lokale basis open-en-gesloten in de topologie τ en bewijs dat (P, τ) regulier is.

d. Bewijs dat (P, τ) niet normaal is. *Hint*: $F = \{\langle 0, 2^{-n}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ en H_∞ zijn gesloten en disjunct. Bewijs dat als U en V open zijn en $F \subseteq U$ en $H_\infty \subseteq V$ dan $U \cap V \neq \emptyset$.

Opgave 5. Zij (X, τ) een T_4-ruimte en $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ een *discrete* collectie gesloten verzamelingen; *discreet* betekent dat voor elke x in X een open verzameling O bestaat met $x \in O$ en zó dat er ten hoogste één n is met $O \cap F \neq \emptyset$.

a. Toon aan dat $F_m \cap F_n = \emptyset$ als $m \neq n$.
b. Toon aan dat $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ gesloten is.
c. Bewijs dat er een familie open verzamelingen $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ bestaat zó dat $F_n \subseteq O_n$ voor alle n, en zó dat $O_M \cap O_n = \emptyset$ als $m \neq n$. *Hint*: Pas de stelling van Tietze- en Urysohn toe op een geschikte functie.
d. Verbeter het vorige onderdeel en laat zien dat de familie $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ ook discreet genomen kan worden.