OPGAVEN TOPOLOGIE (WEEK 15)

AM3590

Opgave 1. (Over βX) Laat X volledig regulier zijn.

a. Bewijs: als K een compacte Hausdorffruimte, en $f : X \to K$ continu dan is er een continue uitbreiding $\beta f : \beta X \to K$ van f. *Hint*: Zij $\mathcal{C}$ de verzameling van alle continue functies van K naar $[0,1]$. We hebben gezien dat $x \mapsto \langle g(x) : g \in \mathcal{C}\rangle$ een inbedding van K in $[0,1]^{\mathcal{C}}$ geeft. Neem voor elke $g \in \mathcal{C}$ de unieke uitbreiding $\bar{g}$ van $g \circ f$ en definieer $\beta f : \beta X \to [0,1]^{\mathcal{C}}$ door $\beta f : x \mapsto \langle \bar{g}(x) : g \in \mathcal{C}\rangle$.

b. Bewijs: als Y een compactificatie van X is, dus Y is compact Hausdorff en er is een inbedding $e : X \to Y$ met $e[X]$ dicht in Y, dan is er een afbeelding $E : \beta X \to Y$ die continu is, surjectief, en voldoet aan $E(x) = e(x)$ als $x \in X$ en $E(x) \notin X$ als $x \in \beta X \setminus X$. *Hint*: voor het laatste: als $x \in X$ en $y \in \beta X \setminus X$ neem disjuncte *gesloten* omgevingen van x en y en bekijk hun beelden onder e en E.

c. Bewijs: als Z een compactificatie van X is met de eigenschap dat elke continue fuctie $f : X \to [0,1]$ een continue uitbreiding naar Z heeft, dan geldt $Z = \beta X$. *Hint*: Z voldoet aan de conclusies van onderdelen a en b. Er zijn dus continue $f : \beta X \to Z$ en $g : Z \to \beta X$ die voldoen aan $f(x) = g(x) = x$ voor $x \in X$; bewijs dat f en g elkaars inversen zijn.

Opgave 2. ($\beta\mathbb{N}$ in de Reële Analyse) Uit de Reële Analyse kennen we ℓ_∞: de Banachruimte van alle begrensde rijen reële getallen, met norm $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

a. Bewijs dat ℓ_∞ en $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R})$, de laatste met de supnorm $\|f\| = \sup\{|f(u)| : u \in \beta\mathbb{N}\}$, isomorf zijn. *Hint*: ℓ_∞ is eigenlijk de ruimte van begrensde continue fucties op $\mathbb{N}$.

b. Bewijs: voor elke $u \in \beta\mathbb{N}$ definieert $\varphi_u : f \mapsto f(u)$ een continue lineaire functionaal op $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (en dus op ℓ_∞).

Zoals bekend levert elk element y van ℓ_1 een functionaal ψ_y op ℓ_∞ door $\psi_y : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n$.

c. Bewijs: als $u \in \mathbb{N}^*$ dan hoort φ niet bij een element van ℓ_1. *Hint*: Ga na dat $\varphi_u(x) = \varphi_u(z)$ als $\{n : x_n \neq z_n\}$ eindig is. Laat zien dat dit niet geldt voor functionalen van de vorm ψ_y.

Opgave 3. (De Eénpuntscompactificatie) Zij (X, τ) een lokaal compacte ruimte (inclusief Hausdorff!). Neem een punt ∞ dat niet in X ligt, en laat $\alpha X = X \cup \{\infty\}$. Definieer op αX een topologie τ^+ als volgt:

$$\tau^+ = \tau \cup \{\alpha X \setminus K : K \subset X \text{ en } K \text{ is compact in } (X, \tau)\}$$

a. Bewijs dat τ^+ een topologie is.

b. Bewijs dat (X, τ) een *open* deelruimte van $(\alpha X, \tau^+)$ is.

c. Bewijs dat αX compact en Hausdorff is.

d. Bewijs: X ligt dicht in αX dan en slechts dan als X niet compact is.

De ruimte αX is de éénpuntscompactificatie (of ook wel Alexandroffcompactificatie) van X.

e. Beschrijf $\alpha\mathbb{N}$, $\alpha\mathbb{R}$ en $\alpha\mathbb{R}^2$.

f. Bewijs dat X open is in βX. *Hint*: Pas onderdeel b van Opgave 1 toe.

Opgave 4. (De ruimte P nog een keer) In $\mathbb{R}^2$ definiëren we een deelverzameling P, als volgt. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ nemen we $H_n = [0,1] \times \{2^{-n}\}$ en verder $H_\infty = (0,1] \times \{0\}$. Dan is P gelijk aan de vereniging $H_\infty \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

Op P definiëren we een topologie τ door lokale bases af te spreken.

- Als $\langle x, y\rangle \in P$ en $x, y > 0$ dan $\mathcal{B}_{\langle x,y\rangle} = \big\{\{\langle x, y\rangle\}\big\}$; dus $\{\langle x, y\rangle\}$is open.
- Als $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathcal{B}_{\langle 0,2^{-n}\rangle} = \{H_n \setminus F : F \text{ is eindig en } \langle 0, 2^{-n}\rangle \notin F\}$.
- Als $x \in (0,1]$ dan $\mathcal{B}_{\langle x,0\rangle} = \big\{P \cap \big(\{x\} \times [0, 2^{-n})\big) : n \in \mathbb{N}\big\}$.

a. Ga na dat P lokaal compact is.

b. Maak de éénpuntscompactificatie αP van P door $(0,0)$ als het nieuwe punt te nemen, en beschrijf een lokale basis in $(0,0)$.

c. Bewijs dat $\alpha P = \beta P$. *Hint*: Stel $f : P \to [0,1]$ is continu. Bewijs dat er een aftelbare deelverzameling A van $(0,1]$ is zó dat f constant is op $\big([0,1] \setminus A\big) \times \{2^{-n}\}$ voor elke n.