OPGAVEN TOPOLOGIE (01)

AM3590

Opgave 1. We bekijken de bijectie tussen $\mathbb{P}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Definieer een metriek d op $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ door

$$d(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{if } s = t \\ 2^{-n} & \text{if } s \neq t \text{ and } n = \min\{i : s_i \neq t_i\} \end{cases}$$

a. Ga na dat d een metriek is
b. Bewijs
$$B(s, 2^{-n}) = \{t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall i \leqslant n)(s_i = t_i)\}$$
c. Bewijs dat $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ homeomorf zijn.
d. Bewijs dat de bijectie tussen $\mathbb{P}$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een homeomorfisme is. *Hint*: Bepaal de beelden van de bollen $B(s, 2^{-n})$.
e. Bewijs dat $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ homeomorf zijn.

Opgave 2. Definieer twee rijen functies $\langle x_n \rangle_n$ en $\langle y_n \rangle_n$ functies van $[0,1]$ naar $[0,1]$, als volgt. Om te beginnen $x_0(t) = y_0(t) = t$ en verder recursief: als x_n en y_n gegeven zijn definieer dan x_{n+1} en y_{n+1} door

$$x_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}x_n(9t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_n(9t-1) & \frac{1}{9} \leqslant t \leqslant \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3}x_n(9t-2) & \frac{2}{9} \leqslant t \leqslant \frac{3}{9} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_n(9t-3) & \frac{3}{9} \leqslant t \leqslant \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_n(9t-4) & \frac{4}{9} \leqslant t \leqslant \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_n(9t-5) & \frac{5}{9} \leqslant t \leqslant \frac{6}{9} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_n(9t-6) & \frac{6}{9} \leqslant t \leqslant \frac{7}{9} \\ 1 - \frac{1}{3}x_n(9t-7) & \frac{7}{9} \leqslant t \leqslant \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_n(9t-8) & \frac{8}{9} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad y_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}y_n(9t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_n(9t-1) & \frac{1}{9} \leqslant t \leqslant \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}y_n(9t-2) & \frac{2}{9} \leqslant t \leqslant \frac{3}{9} \\ 1 - \frac{1}{3}y_n(9t-3) & \frac{3}{9} \leqslant t \leqslant \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y_n(9t-4) & \frac{4}{9} \leqslant t \leqslant \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y_n(9t-5) & \frac{5}{9} \leqslant t \leqslant \frac{6}{9} \\ \frac{1}{3}y_n(9t-6) & \frac{6}{9} \leqslant t \leqslant \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_n(9t-7) & \frac{7}{9} \leqslant t \leqslant \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}y_n(9t-8) & \frac{8}{9} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Voor elke n definieren we $f_n : [0,1] \to [0,1]^2$ door $f(t) = \big(x_n(t), y_n(t)\big)$.
a. Schets de beeldkrommen van f_0, f_1 en f_2.
b. Laat zien dat $\|f_1(t) - f_0(t)\| \leqslant \sqrt{2}$ voor alle t
c. Laat zien dat $\|f_2(t) - f_1(t)\| \leqslant \sqrt{2} \cdot 3^{-1}$ voor alle t
d. Laat zien dat $\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leqslant \sqrt{2} \cdot 3^{-n}$ voor alle t
e. Laat zien dat $\langle f_n \rangle_n$ een Cauchy-rij van continue functies is (ten opzichte van de uniforme metriek).
f. Laat zien dat $\langle f_n \rangle_n$ uniform naar een continue functie $f : [0,1] \to [0,1]^2$ convergeert.
g. Toon aan dat f surjectief is. *Hint*: als $t = k \cdot 9^{-n}$ met $k \in \mathbb{N}$ en $k \leqslant 9^n$ dan geldt $f_{n+1}(t) = f_n(t)$.
h. Uitdaging: lees Peano's artikel en laat zien dat f precies de functie van Peano is.
i. Uitdaging: wat kun je zeggen over de differentieerbaarheid van (de coördinaatfuncties van) f?.