OPGAVEN TOPOLOGIE (04)

AM3590

Opgave 1. Bewijs: $\dim X \leqslant n$ dan en slechts dan als voor elke familie $\{F_0, \ldots, F_n, F_{n+1}\}$ van $n+2$ gesloten verzamelingen met $\bigcap_{i=0}^{n+1} F_i = \emptyset$ een familie $\{G_0, \ldots, G_n, G_{n+1}\}$ van $n+2$ gesloten verzamelingen bestaat zó dat

(1) $F_i \subseteq G_i$ voor alle i,
(2) $\bigcap_{i=0}^{n+1} G_i = \emptyset$, en
(3) $\bigcup_{i=0}^{n+1} G_i = X$.

of duaal: dan en slechts dan als voor elke familie $\{U_0, \ldots, U_n, U_{n+1}\}$ van $n+1$ open verzamelingen met $\bigcup_{i=0}^{n+1} U_i = X$ een familie $\{V_0, \ldots, V_n, V_{n+1}\}$ van $n+2$ open verzamelingen bestaat zó dat

(1) $V_i \subseteq U_i$ voor alle i,
(2) $\bigcup_{i=0}^{n+1} V_i = X$, en
(3) $\bigcap_{i=0}^{n+1} V_i = \emptyset$.

Opgave 2. In $\mathbb{R}^n$ definieren we $B^n = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$ en $S^{n-1} = \{x : \|x\| = 1\}$ (respectievelijk de gesloten eenheidsbol en eenheidssfeer). Construeer een homeomorphisme tussen B^n en $[0,1]^n$ dat S^{n-1} op onto $\{x \in [0,1]^n : (\exists i)(x_i = 0 \vee x_i = 1)\}$ afbeeldt.

Opgave 3. Bewijs de Dekpuntstelling van Brouwer voor $n = 1$: als $f : [01,] \to [0,1]$ continu is dan is er een x met $f(x) = x$.

Opgave 4. Bewijs dat een 3-simplex homeomorf is met de 3-kubus $[0,1]^3$. *Hint*: Neem het 3-simplex $[\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ in $\mathbb{R}^3$, waarbij $\mathbf{0}$ de nulvector is en de $\boldsymbol{e}_i$ de standaardbasisvectoren. Dit zit in de 3-kubus (teken een plaatje!). Verdeel de driehoek $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ in zes driehoeken door middel van lijnstukken vanuit het zwaartepunt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ naar de hoekpunten, en op die manier het simplex in zes deelsimplices. Verdeel op een dergelijke manier de kubus in zes simplices met telkens $\mathbf{0}$ en $(1,1,1)$ en twee van de zes andere hoekpunten (telkens aanliggende paren. Definieer het homeomorfisme stuksgewijs op elk simplex (op elk simplex kun je een lineaire afbeelding gebruiken).