OPGAVEN TOPOLOGIE (10)

AM3590

Opgave 1. Over de Sorgenfreylijn $\mathbb{S}$. Dat is dus $\mathbb{R}$ met de topologie τ_s voortgebracht door de basis $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R} \text{ en } a < b\}$. De gewone topologie van $\mathbb{R}$ noteren we τ_r.

a. Wat is het verband tussen τ_s en τ_r? Geldt $\tau_s \subseteq \tau_r$, of $\tau_r \subseteq \tau_s$, of geen van beide?

b. Bewijs: voor elke $A \subseteq \mathbb{S}$ geldt $\operatorname{cl}_s A \subseteq \operatorname{cl}_r A$.
(Hier: cl_s is de afsluiting ten opzichte van τ_s, en τ_r die ten opzichte van τ_r).

c. Maak deelverzamelingen A_n van $\mathbb{S}$ zó dat $\operatorname{cl}_R A_n \setminus \operatorname{cl}_s A_n$ precies n elementen heeft, maak ook een A waarbij het verschil oneindig veel punten heeft.

d. Bewijs: voor elke $A \subseteq \mathbb{S}$ geldt: $\operatorname{cl}_R A \setminus \operatorname{cl}_s A$ is aftelbaar.

Opgave 2. We werken in het lexicografisch geordende vierkant $\mathbb{V}$. De ordening is dus gegeven door: $\langle x,y\rangle \prec \langle u,v\rangle$ als $x < u$, of $x = u$ en $y < v$. De bijbehorende orde-topolgie noteren we τ_v.

a. Wat is het verband tussen τ_v en de gewone topologie τ_r op $[0,1]^2$? Geldt $\tau_v \subseteq \tau_r$, of $\tau_r \subseteq \tau_v$, of geen van beide?

b. Zij $H = \{\langle x,x\rangle : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}$. Bepaal $\sup H$ en $\inf H$.

c. Bewijs dat elke deelverzameling van $\mathbb{V}$ een supremum heeft. *Hint*: Kijk voor $A \subseteq \mathbb{V}$ naar het supremum van de verzameling van alle eerste coördinaten.

d. Beschrijf de afsluiting van de verzameling H uit onderdeel a.

Opgave 3. We werken in het Niemytzki-vlak N. Noem de topologie τ_N. De gewone topologie op $\{\langle x,y\rangle : y \geqslant 0\}$ noteren we τ_r.

a. Wat is het verband tussen τ_N en τ_r? Geldt $\tau_N \subseteq \tau_r$, of $\tau_r \subseteq \tau_N$, of geen van beide?

b. Bewijs: *elke* deelverzameling van de x-as is gesloten ten opzichte van de topologie τ_N.

Opgave 4. Drie belangrijke eigenschappen die een topologische ruimte kan hebben zijn

- separabel: er is een aftelbare dichte deelverzameling
- eerste aftelbaarheidsaxioma: in elk punt is er een *aftelbare* lokale basis
- tweede aftelbaarheidsaxioma: er is een aftelbare basis voor de topologie

Onderzoek voor de drie ruimten $\mathbb{S}$, $\mathbb{V}$, en het Niemytzki-vlak welke van deze drie eigenschappen ze wel/ niet hebben.