OPGAVEN TOPOLOGIE (12)

AM3590

Opgave 1. Definieer een equivalentierelatie $\equiv$ op $\mathbb{R}$ met de gewone topologie door $x \equiv y$ als $x - y \in \mathbb{Q}$. Wat is de quotiënttopologie op $\mathbb{R}/\equiv$?

Opgave 2. Bekijk de ruimte $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ ("bloemetje met oneindig veel blaadjes").

a. Is er een aftelbare lokale basis in het punt $\mathbb{N}$?

b. Bewijs: als het punt $\mathbb{N}$ in de afsluiting van een verzameling A zit dan is er een rij in A die naar $\mathbb{N}$ convergeert.

Opgave 3. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu zijn.

a. Bewijs: als f voldoet aan $f(x + y) = f(x) + f(y)$ voor alle x en y dan geldt $f(x) = f(1) \cdot x$ voor alle x.

b. Bewijs: als f voldoet aan $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ voor alle x en y dan geldt $f(x) = f(1)^x$ voor alle x.

Opgave 4. Laat $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ continu zijn, en niet constant gelijk aan 0.

a. Bewijs: als f voldoet aan $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ voor alle x en y dan is er een $a > 0$ zó dat $f(1) = a$ en $f(x) = {}^{a}\log x$ voor alle x.

b. Bewijs: als f voldoet aan $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ voor alle x en y dan is er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zó dat $f(x) = x^{\alpha}$ voor alle x.