OPGAVEN TOPOLOGIE (13)

AM3590

Opgave 1. Bewijs dat het Niemytzki-vlak regulier is door te bewijzen dat voor elk punt (x, y) en elke $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\overline{B(x, y, n+1)} \subseteq B(x, y, n)$$

Als $y > 0$ dan kun je de metriek gebruiken; als $y = 0$ laat dan zien dat

$$\overline{B(x, y, m)} = \bigl\{\langle u, v\rangle : \|\langle u, v\rangle - \langle x, 2^{-m}\rangle\| \leqslant 2^{-m}\bigr\}$$

Opgave 2.

a. Bewijs dat het lexicografisch geordende vierkant $\mathbb{V}$ regulier is.

b. Bewijs dat elke lineair geordende ruimte met de intervaltopologie regulier is door het geschetste bewijs uit het college uit te werken.

Opgave 3. Maak op $\mathbb{R}$ een topologie τ_b door aan de gewone topologie τ de verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ als extra open verzameling toe te voegen. Dus $\mathcal{S} = \tau \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ is een subbasis voor τ_b.

a. Ga na: als $q \in \mathbb{Q}$ dan is $\{(q - r, q + r) : r > 0\}$ een lokale basis voor τ_b in q en als $p \notin \mathbb{Q}$ dan is $\{(p - r, p + r) \setminus \mathbb{Q} : r > 0\}$ een lokale basis voor τ_b in p.

b. Bewijs: $(\mathbb{R}, \tau_b)$ is niet regulier.

Opgave 4. Neem in het Niemytzki-vlak N de twee gesloten verzamelingen $F = \{\langle x, 0\rangle : x \leqslant 0\}$ en $G = \{\langle x, 0\rangle : x > 0\}$. Maak disjuncte open verzamelingen U en V in $\mathbb{N}$ zó dat $F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.

Opgave 5. In $\mathbb{R}^2$ definiëren we een deelverzameling P, als volgt. Voor $n \in \mathbb{N}$ zetten we $H_n = [0, 1] \times \{2^{-n}\}$ en verder $H_\infty = (0, 1] \times \{0\}$.

Dan is P gelijk aan de vereniging $H_\infty \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

a. Teken een plaatje van P.

Op P definiëren we een topologie τ door lokale bases af te spreken. Als $\langle x, y\rangle \in P$ en $x, y > 0$ dan $\mathcal{B}_{\langle x,y\rangle} = \bigl\{\{\langle x, y\rangle\}\bigr\}$. Als $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathcal{B}_{\langle 0,2^{-n}\rangle} = \{H_n \setminus F : F \text{ is eindig en } \langle 0, 2^{-n}\rangle \notin F\}$. Als $x \in (0, 1]$ dan $\mathcal{B}_{\langle x,0\rangle} = \bigl\{P \cap \bigl(\{x\} \times [0, 2^{-n})\bigr) : n \in \mathbb{N}\bigr\}$.

b. Ga na dat dit een goede toekenning van lokale bases is.

c. Toon aan dat elk element van elke lokale basis open-en-gesloten in de topologie τ en bewijs dat (P, τ) regulier is.

d. Bewijs dat (P, τ) niet normaal is. *Hint*: $F = \{\langle 0, 2^{-n}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ en H_∞ zijn gesloten en disjunct. Bewijs dat als U en V open zijn en $F \subseteq U$ en $H_\infty \subseteq V$ dan $U \cap V \neq \emptyset$.