OPGAVEN TOPOLOGIE (18)

AM3590

Opgave 1. Geef een volledig bewijs van de stelling dat rijtjes-continue functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ ook ε-δ-continu zijn. Geef hierbij nauwkeurig aan op welke familie verzamelingen je het Keuzeaxioma toepast.

Opgave 2. De niet-meetbare verzameling van Vitali. Zoals op college aangegeven nemen we een keuzefunctie voor de nevenklassen van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Het resultaat is een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat deze elke nevenklasse in precies één punt snijdt. Voor de rest van de opgave is het handig om aan te nemen dat $V \subseteq [0,1]$. We nemen aan dat V meetbaar is en dus dat $\lambda(V)$ bestaat.

a. Laat zie dat dat laatste geen beperking is.
b. Ga na dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ precies één $q \in \mathbb{Q}$ bestaat met $x - q \in V$, en concludeer: als $p \neq q$ dan $(p+V) \cap (q+V) = \emptyset$.
c. Waarom geldt $\lambda(q+V) = \lambda(V)$ voor elke $q \in \mathbb{Q}$?
d. Bewijs dat $\mathbb{R} = \bigcup\{q+V : q \in \mathbb{Q}\}$ en concludeer dat $\lambda(V) > 0$.
e. Bewijs dat $q + V \subseteq [0,2]$ als $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.
f. Ga na dat $\lambda\bigl(\bigcup\{q+V : q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}\bigr) \leqslant 2$, en concludeer dat $\lambda(q+V) = 0$.
g. Concludeer dat V toch niet meetbaar is.