OPGAVEN TOPOLOGIE (19)

AM3590

Eerst wat opgaven over het product van twee topologische ruimten (X, τ) en (Y, σ).

Opgave 1.
a. Toon aan: als $F \subseteq X$ en $G \subseteq Y$ gesloten zijn, dan is $F \times G$ gesloten in $X \times Y$. *Hint*: Teken een plaatje en schrijf het complement van $F \times G$ als de vereniging van twee open verzamelingen.
b. Toon aan: als $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$ dan geldt $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Opgave 2. Toon voor elk van de volgende eigenschappen aan dat $X \times Y$ deze heeft dan en slechts dan als X en Y deze hebben.
a. Eerste aftelbaarheidsaxioma.
b. Tweede aftelbaarheidsaxioma.
c. Separabel.

Nu wat opgaven over een willekeurige familie ruimten $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$.

Opgave 3.
a. Toon aan: als $F_i \subseteq X_i$ voor elke $i \in I$ dan is $\prod_{i \in I} F_i$ gesloten in $\prod_{i \in I} X_i$.
b. Toon aan: als $A_i \subseteq X_i$ voor alle i dan geldt $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.
c. Stel $I = \mathbb{N}$, $X_i = \mathbb{R}$, en $O_i = (0, 1)$ voor alle i; toon aan dat $\prod_{i \in I} O_i$ *niet* open is in $\prod_{i \in I} X_i$.

Opgave 4. Stel I is aftelbaar. Toon voor elk van de volgende eigenschappen aan dat $\prod_{i \in I} X_i$ deze heeft dan en slechts dan als elke X_i deze heeft.
a. Eerste aftelbaarheidsaxioma.
b. Tweede aftelbaarheidsaxioma.
c. Separabel.