OPGAVEN TOPOLOGIE (21)

AM3590

Opgave 1. Bewijs dat in een ruimte X voor een open verzameling O en een dichte verzameling D altijd geldt: $\overline{O} = \overline{O \cap D}$.

Opgave 2. Bewijs dat voor een ruimte X de volgende uitspraken equivalent zijn:

- voor elke open verzameling O is $\overline{O}$ open, en
- voor elk tweetal disjuncte open verzamelingen U en V geldt $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Opgave 3. Werk in $\beta\mathbb{N}$.

a. Toon aan dat $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$ als $A, B \subseteq \mathbb{N}$.

b. Bewijs dat de familie $\{\overline{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ een basis voor de topologie is.

c. Voor $A \subseteq \mathbb{N}$ noteren we $A^* = \overline{A} \setminus A$, dus in het bijzonder $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Bewijs: voor $A, B \subseteq \mathbb{N}$ geldt: $A^* \cap B^* = \emptyset$ dan en slechts dan als $A \cap B$ eindig is.

Opgave 4. Werk in het voorbeeld van Thomas en definieer voor elke $a \in \mathbb{R}$ de verzameling U_a door $U_a = \{\langle x, y\rangle \in X : x < a\}$.

a. Neem een $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ zó dat $n = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant a\}$ oneven is. Bewijs: $\operatorname{int} U_a = U_a \setminus \{p_{n,k} : k \geqslant 2\}$ en $\operatorname{cl} U_a = U_a \cup \{\langle n+1, y\rangle : n+1-a \leqslant y < \frac{1}{2}\}$.

b. Wat zijn $\operatorname{int} U_a$ en $\operatorname{cl} U_a$ als n even is?