OPGAVEN TOPOLOGIE (22)

AM3590

Opgave 1. Geef een bewijs van de Stelling van Rado, zoals hij in het artikel van De Bruijn en Erdős geformuleerd is:

> Gegeven twee verzamelingen M en M_1. Neem aan dat voor elke $\nu \in M_1$ een eindige deelverzameling A_ν van M gegeven is. Neem aan dat voor elke eindige deelverzameling $N \subseteq M_1$ een keuzefunctie $x_N(\nu)$ gegeven is die voor elke $\nu \in N$ een element van A_ν bepaalt:
> $$x_N(\nu) \in A_\nu.$$
> Dan bestaat een keuzefunctie $x(\nu)$ gedefinieerd voor alle $\nu \in M_1$ ($x(\nu) \in A_\nu$ als $\nu \in M_1$) met de volgende eigenschap. Als K een eindige deelverzameling van M_1 is dan bestaat een eindige deelverzameling N ($K \subseteq N \subseteq M_1$) zó dat de functie x op K samenvalt met x_N:
> $$x(\nu) = x_N(\nu) \qquad (\nu \in K)$$

Opgave 2. Toepassing van het Lemma van de Drie Verzamelingen in $\beta\mathbb{N}$. We beschouwen $\beta\mathbb{N}$ als de ruimte van alle ultrafilters op $\mathbb{N}$. Stel $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is een afbeelding.

a. Bewijs dat $\beta f : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, gegeven door $\beta f(u) = \{A : f^{-1}[A] \in u\}$, een continua afbeelding is.

b. Bewijs: als $\beta f(u) = u$ dan behoort $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}$ tot u (ofwel $u \in \overline{\{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}}$).

Opgave 3. Laat F en G disjuncte gesloten verzamelingen in $\mathbb{N}^*$ zijn. Bewijs dat er een deelverzameling A van $\mathbb{N}$ is zó dat $F \subseteq A^*$ en $A^* \cap G = \emptyset$.