OPGAVEN TOPOLOGIE (23)

AM3590

Opgave 1. Bekijk de bekende rij functies $\langle f_n \rangle_n$ van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$, gegeven door $f_n(x) = x^n$.
a. Bewijs netjes dat de verzameling $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ niet gelijkmatig continu is in 1.
b. Bewijs dat F gesloten is in $C([0,1], \mathbb{R})$ ten opzichte van de sup-norm.
c. Bepaal de afsluiting van F in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ten opzichte van de producttopologie.

Opgave 2. We hebben gezien: als de rij $\langle f_n \rangle_n$ puntsgewijs convergeert en als de verzameling $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ gelijkmatig continu is dan is de limiet continu. Definieer $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2)$. Laat zien: $\langle f_n \rangle_n$ convergeert puntsgewijs naar de nulfunctie, maar $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ is niet gelijkmatig continu.

Opgave 3. Stel X is compact Haudorff en $F \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Neem aan dat F gelijkmatig continu is en puntsgewijs begrensd, dat laatste wil zeggen: voor elke $x \in X$ is er een reëel getal M_x zó dat $|f(x)| \leqslant M_x$ voor alle $f \in F$.

Bewijs dat F uniform begrensd is: er is één reëel getal M zó dat $|f(x)| \leqslant M$ voor alle $f \in F$ en alle $x \in X$.