OPGAVEN TOPOLOGIE (24)

AM3590

Opgave 1. Het bewijs van de volledige regulariteit van lokaal compacte ruimten ging als volgt: neem F gesloten en $x \in X \setminus F$; neem O_x open met $x \in O_x$ en $\overline{O_x}$ compact. Er is een continue functie $f : \overline{O_x} \to [0,1]$ zó dat $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$ als $y \in F \cap \overline{O_x}$ of $y \in \overline{O_x} \setminus O_x$. Maak hier een continue functie $f^+ : X \to [0,1]$ van door nog $f^+(y) = 1$ voor $y \in X \setminus \overline{O_x}$ te stellen.

Bewijs dat die functie f^+ continu is.

Opgave 2. Bewijs dat open en gesloten deelruimten van lokaal compacte ruimten weer lokaal compact zijn.

Opgave 3. Ga na dat de toekenning van locale bases uit de alternatieve beschrijving van de compact-open topologie inderdaad een goede toekenning is. Herinnering:

$$\mathcal{B}_f = \bigl\{B(f, C, \varepsilon) : C \text{ compact in } X, \varepsilon > 0\bigr\}$$

en

$$B(f, C, \varepsilon) = \bigl\{g : \max\{|g(x) - f(x)| : x \in C\} < \varepsilon\bigr\}$$

Opgave 4. Bewijs: een rij $\langle f_n \rangle_n$ in $C(X, \mathbb{R})$ convergeert naar f in de compact-open topologie dan en slechts dan als $\langle f_n \rangle_n$ op elke compacte deelverzameling van X *uniform* naar f convergeert.