DE DETAILS VAN CANTOR'S BEWYS DAT VOOR GESLOTEN DEELVERZAMELINGEN VAN $\mathbb{R}$ GELDT: DE VERZAMELING IS AFTELBAAR OF EVEN GROOT ALS $\mathbb{R}$ ZELF.
NB HET ZOU MOOI ZYN ALS IEDEREEN DIT BEWYS HELEMAAL KAN VOLGEN EN IK DOE MYN BEST HET ZO BEGRYPELYK MOGELYK TE HOUDEN. MYN HOOFDDOEL IS TE LATEN ZIEN HOEVEEL NIEUW MATERIAAL CANTOR MOEST ONTWIKKELEN OM HET BEWYS ROND TE KRYGEN.

(1) VERDICHTINGSPUNT [ZIE OOK 24-04-2024]
ALS $P \subseteq \mathbb{R}$ EN $x \in \mathbb{R}$ DAN IS $x$ EEN VERDICHTINGSPUNT VAN $P$ ALS VOOR ELK INTERVAL $(a,b)$ OM $x$ DE DOORSNEDE $(a,b) \cap P$ ONEINDIG IS.
NUTTIGE KARAKTERIZERING:
$x$ IS EEN VERDICHTINGSPUNT VAN $P$ DAN EN SLECHTS DAN ALS VOOR ELK INTERVAL $(a,b)$ OM $x$ ER EEN $p \in P \cap (a,b)$ IS DIE ONGELYK IS AAN $x$.

- HET IS DUIDELYK DAT ELK VERDICHTINGSPUNT DE ZWAKKERE EIGENSCHAP HEEFT: ALS $x$ EEN VERDICHTINGSPUNT IS EN $(a,b)$ EEN INTERVAL OM $x$ DAN IS $P \cap (a,b)$ ONEINDIG DUS IS ER ZEKER EEN PUNT $p$ IN $P \cap (a,b)$ ONGELYK AAN $x$.
- OMGEKEERD: STEL $x$ HEEFT DE (OGENSCHYNLYK) ZWAKKERE EIGENSCHAP EN LAAT $(a,b)$ EEN INTERVAL OM $x$ ZYN.

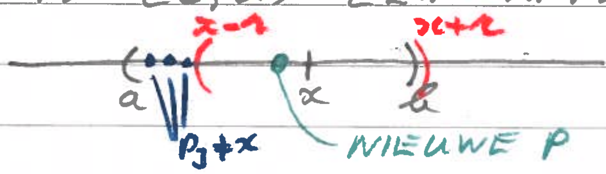
07/05/2024

Te bewyzen: $P \cap (a,b)$ is oneindig.

- $P \cap (a,b)$ is zeker niet leeg want er zit, by onderstelling, een punt $p$ in dat ongelyk is aan $x$.
- Om te bewyzen dat $P \cap (a,b)$ oneindig veel punten heeft gaan we te werk als Euclides: stel $\{p_i : 0 \leq i < m\}$ is een eindige deelverzameling van $P \cap (a,b)$, ik zeg dat er nog een punt in $P \cap (a,b)$ zit ongelyk aan de $p_i$
  - Het is mogelyk dat $x \in P$ dus er zou een $i$ kunnen zyn met $p_i = x$.
  - In het extreme geval dat $m = 1$ en $p_0 = x$ nemen we $p \in P \cap (a,b)$ ongelyk aan $x$.
  - In het minder extreme geval dat er ten minste één $j$ is met $p_j \neq x$ doen we het volgende: neem

$$r = \min\{|p_j - x| : 0 \leq j < m \text{ èn } p_j \neq x\}$$

Het minimum bestaat want de verzameling getallen is eindig, en verder geldt $r > 0$.
Neem $c = \max\{a, x-r\}$ en $d = \min\{b, x+r\}$
Dan is $(c,d)$ een interval om $x$




Hier $c = x - r$
$d = b$

En by onderstelling is er een $p$ in $P \cap (c,d)$ ongelyk aan $x$
Omdat $x - r < p < x + r$ geldt $p \notin \{p_i : 0 \leq i < m\}$
omdat $a \leq c$ en $d \leq b$ geldt $p \in (a,b)$
Dus $p$ is als gewenst.

B

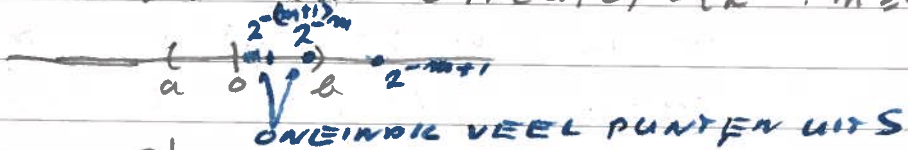
② AFGELEIDE VERZAMELING [ZIE 24-04-2024]

DE VERZAMELING VERDICHTINGSPUNTEN VAN EEN VERZAMELING $P$ NOTEREN WE ALS $P'$ EN WE NOEMEN DIT DE <u>AFGELEIDE</u> <u>VERZAMELING</u>

VOOR LATER: $S = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

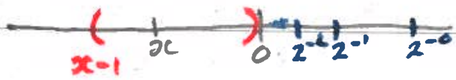
ER GELDT $S' = \{0\}$.

- ALS $(a, b)$ EEN INTERVAL OM $0$ IS DAN IS ER EEN $m$ ZÓ DAT $2^{-m} < b$
  ALS $n \geq m$ DUS $S \cap (a, b) = \{2^{-n} : n \geq m\}$



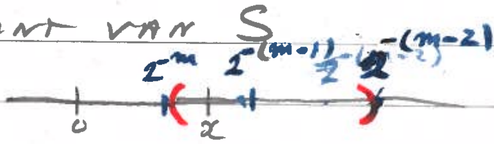

DUS $0 \in S'$

- ALS $x < 0$ DAN IS $(x-1, 0)$ EEN INTERVAL OM $x$ MET $(x-1, 0) \cap S = \emptyset$




DUS $x \notin S'$

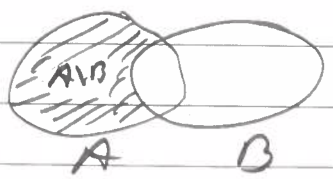
- ALS $x > 0$ DAN IS ER EEN $m$ ZÓ DAT $2^{-m} < x \leq 2^{-(m-1)}$
  DAN BEVAT HET INTERVAL $(2^{-m}, 2^{-(m-2)})$
  HOOGUIT ÉÉN PUNT VAN $S$
  DUS $x \notin S'$




ER GELDT OOK $T' = \{0\}$ $(T = S \cup \{0\})$

③ BELANGRIJKE OPMERKING

DE VERSCHILVERZAMELING $P \setminus P'$ IS ALTIJD AFTELBAAR. [ $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$




]

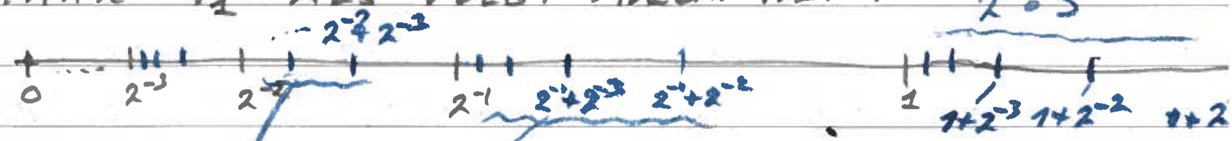
STEL $x \in P$ MAAR $x \notin P'$
DAN IS ER EEN INTERVAL $(a,b)$ OM $x$
ZÓ DAT $(a,b) \cap P = \{x\}$ [ZIE DE KARAKTERISERING]
DAN ZIJN ER RATIONALE GETALLEN $s_x$ EN $t_x$
ZÓ DAT $a < s_x < x < t_x < b$
WE KRIJGEN ZO EEN KOPPELING
$x \longleftrightarrow (s_x, t_x)$
TUSSEN $P \setminus P'$ EN EEN FAMILIE INTERVALLEN MET RATIONALE EINDPUNTEN
DIT IS EEN INJECTIEVE AFBEELDING.
IMMERS $(s_x, t_x) \cap P = \{x\}$
DUS ALS $y \in P \setminus P'$ EN $y \neq x$
DAN $(s_y, t_y) \cap P = \{y\} \neq \{x\}$
DUS $(s_y, t_y) \neq (s_x, t_x)$.
ER ZIJN 'SLECHTS' AFTELBAAR VEEL INTERVALLEN MET RATIONALE EINDPUNTEN, DUS $P \setminus P'$ IS AFTELBAAR.
[TER GERUSTSTELLING: DIT KAN BUITEN HET KEUZEAXIOMA OM.
NEEM EEN AFTELLING $(q_n : n \in \mathbb{N})$ VAN $\mathbb{Q}$.
EN DEFINIEER $s_x$ EN $t_x$ TELKENS ALS DE EERSTE $q_m$ EN $q_n$ MET $q_m < x < q_n$
EN $(q_m, q_n) \cap P = \{x\}$. ]

(4) WE ZEGGEN DAT $P$ GESLOTEN IS ALS $P' \subseteq P$.
EN WE HEBBEN DE STELLING DAT
$P'$ ALTIJD GESLOTEN IS (EVENTUEEL LEEG).
ZIE 24-04-2024 VOOR HET BEWIJS

(5) ENIGE VOORBEELDEN OM DE PROBLEMEN TE ILLUSTREREN WAAR CANTOR MEE TE MAKEN KREEG.

WE HEBBEN $S = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ EN $T = S \cup \{0\}$

- $T$ IS GESLOTEN EN $T' = S' = \{0\}$
- MAAK $T_1$ ALS VOLGT: BEGIN MET $T$




LEG RECHTS VAN ELKE $2^{-n}$ EEN KOPIE VAN $S$ EN WEL GESCHAALD MET DE FACTOR $2^{-(n+1)}$

DUS BIJ $2^{-0}$ : $\{2^{-0} + 2^{-(n+1)} : n \in \mathbb{N}\}$

$2^{-1}$ : $\{2^{-1} + 2^{-(n+2)} : n \in \mathbb{N}\}$

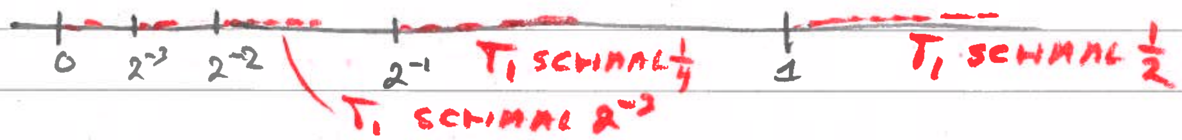
$2^{-2}$ : $\{2^{-2} + 2^{-(n+3)} : n \in \mathbb{N}\}$

ETC

DUS $T$ MET VOOR ELKE $n$ EEN KOPIE VAN $S$ DIE $2^{-n}$ ALS VERDICHTINGSPUNT KREEG

NU GELDT $T_1' = T$ EN $T_1'' = T' = \{0\}$

- IDEM: MAAK $T_2$ DOOR TE BEGINNEN MET $T$ EN BIJ ELKE $2^{-n}$ EEN GESCHAALDE KOPIE VAN $T_1$ TE LEGGEN (RECHTS)

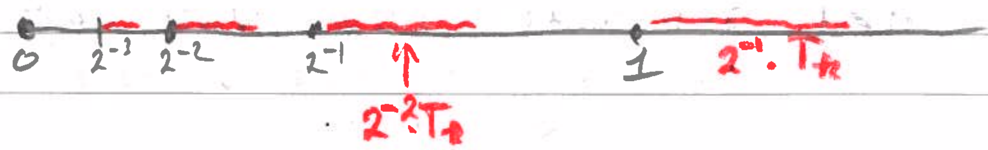



NU GELDT $T_2' = T_1$

$T_2'' = T_1' = T$

$T_2''' = T_1'' = T' = \{0\}$

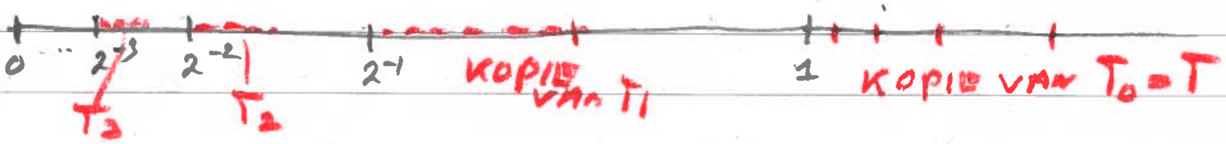
- ZO GAAN WE DOOR, WE MAKEN $T_{k+1}$ DOOR BIJ ELKE $2^{-n}$ EEN KOPIE VAN $T_k$ TE LEGGEN: BIJ $2^{-n}$ : $\{2^{-n} + 2^{-(n+1)} \cdot t : t \in T_k\}$



EIGENSCHAPPEN

- $T_k \subseteq T_{k+1}$ ALTYD
- $T_{k+1}' = T_k$ ALTYD
- $T_k^{(k+1)} = \{0\}$ k+1-STE AFGELEIDE [EN $T_k^{(k+2)} = \emptyset$].

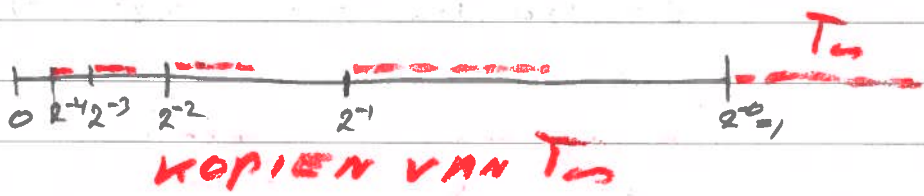
- MAAK $T_\infty$ DOOR BY ELKE $2^{-m}$ EEN KOPIE VAN $T_m$ TE LEGGEN.




DAN: VOOR ALLE $m \in \mathbb{N}$ GELDT
$0 \in T_\infty^{(m)}$, IHB $T_\infty^{(m)} \neq \emptyset$ VOOR ALLE m

- NIEUWE DEFINITIE
$$P^{(\infty)} = \bigcap_m P^{(m)}$$
NEEM DE DOORSNEDE VAN ALLE $P^{(m)}$
DAN $T_\infty^{(\infty)} = \{0\}$

- $T_{\infty+1}$ :




NU $T_{\infty+1}^{(\infty)} = T$ EN $T_{\infty+1}^{(\infty+1)} = \{0\}$ ..

- NA EEN TYDJE GEBRUIKTE CANTOR $\omega$ IN PLAATS VAN $\infty$ OM AAN TE GEVEN DAT HIER IETS NIEUWS GEBEURDE.

- DIT PROCES BLYFT MAAR DOORGAAN MET BOVENSTAANDE METHODE KOMEN ER STEEDS HOGERE AFGELEIDEN.

- DUS EERST $P', P'', \ldots, P^{(n)}, \ldots$
  DAN $P^{(\omega)} = \bigcap_{n<\omega} P^{(n)}$
  DAN $P^{(\omega+1)} = (P^{(\omega)})', P^{(\omega+2)}, \ldots, P^{(\omega+n)}, \ldots$
  DAN $P^{(\omega+\omega)} = \bigcap_{n<\omega} P^{(\omega+n)}$
  DAN $P^{(\omega+\omega+1)}, \ldots, P^{(\omega+\omega+n)}, \ldots, P^{(\omega+\omega+\omega)} \ldots$

  NOTATIE $\omega+\omega = \omega\cdot 2$, $\omega+\omega+\omega = \omega\cdot 3$
  $$P^{(\omega\cdot\omega)} = \bigcap_{n<\omega} P^{(\omega\cdot n)}$$

CANTOR ONTWIKKELDE (BIJNA NOODGEDWONGEN) EEN REKENKUNDE VOOR DEZE INDICES OM ZE ENIGSZINS IN BEDWANG TE KUNNEN HOUDEN.
DIT WERDEN LATER DE ORDINAALGETALLEN

6 UITBREIDING VAN 3

STEL $P$ IS GESLOTEN.
DUS $P' \subseteq P$ EN ALGEMEEN
$$P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \ldots \supseteq P^{(n)} \supseteq \ldots$$
WE HEBBEN GEZIEN DAT $P \setminus P'$ AFTELBAAR IS
WE DOEN DAT BEWIJS OVER.
WE NOTEREN $P^{(0)} = P$ EN BEKIJKEN EEN INDEX $\alpha$ WAARVOOR GELDT $P^{(\alpha)} \setminus P^{(\alpha+1)}$
ALS IN 3 NEMEN WE VOOR ELKE $x \in P^{(\alpha)} \setminus P^{(\alpha+1)}$ EEN INTERVAL $(s_x, t_x)$ OM $x$ MET RATIONALE EINDPUNTEN EN ZÓ DAT $(s_x, t_x) \cap P^{(\alpha)} = \{x\}$.
BEWERING ALS $x \in P^{(\alpha)} \setminus P^{(\alpha+1)}$ EN $y \in P^{(\beta)} \setminus P^{(\beta+1)}$
DAN GELDT $(s_x, t_x) \neq (s_y, t_y)$
- 3 STELT DIT VAST ALS $\alpha = \beta$
- STEL $\alpha < \beta$, DAN GELDT
  $(s_x, t_x) \cap P^{(\alpha)} = \{x\}$ EN DUS
  $(s_x, t_x) \cap P^{(\alpha+1)} = \emptyset$
  MAAR $P^{(\beta)} \subseteq P^{(\alpha+1)}$ DUS $(s_x, t_x) \cap P^{(\beta)} = \emptyset$

07/05/2024

WE VINDEN DAT $x \in (s_x, t_x)$
MAAR $y \notin (s_x, t_x)$.
DUS INDERDAAD $(s_x, t_x) \neq (s_y, t_y)$.

DUS ALS $A$ DE VERZAMELING $\alpha$'S IS
WAARVOOR $P^{(\alpha)} \setminus P^{(\alpha+1)} \neq \emptyset$
DAN IS DE VERENIGING VAN ALLE
$P^{(\alpha)} \setminus P^{(\alpha+1)}$ MET $\alpha \in A$
AFTELBAAR; WANT $x \mapsto (s_x, t_x)$
IS EEN INJECTIEVE AFBEELDING.
NOEM DIE VERENIGING $C$.

(7) BEWIJS VAN DE STELLING.
STEL $P$ IS NIET AFTELBAAR
TE BEWIJZEN DAT $P$ EVEN GROOT
IS ALS $\mathbb{R}$.
BEKIJK $R = P \setminus C$
DAN GELDT $R \subseteq P^{(\alpha)}$ VOOR ALLE $\alpha \in A$
EN $R$ IS GELIJK AAN $P^{(\delta)}$,
MET $\delta$ DE KLEINSTE INDEX
GROTER DAN ALLE $\alpha$'S IN $A$.
EN DAN MOET WEL GELDEN $R' = R$
[OMDAT $\delta \notin A$]
OMDAT $P$ NIET AFTELBAAR IS GELDT $R \neq \emptyset$
DUS [ZIE 24-04-2024] <u>$R$ IS PERFECT</u>

TWEE GEVALLEN: (1) ER IS EEN INTERVAL
$[a, b]$ MET $a < b$ ZÓ DAT $[a, b) \subseteq R$.
DIT IS MAKKELIJK WANT WE WETEN
AL DAT $[a, b)$ EVEN GROOT IS ALS $\mathbb{R}$.

② $R$ bevat geen enkel interval $(a,b)$.
Denk hierbij aan de welbekende Cantorverzameling.
Cantor gaf die als een voorbeeld van een perfecte verzameling die geen enkel interval van positieve lengte bevat.
Dit is het lastigste geval.

ⓐ Neem een punt $x \in R$ en bekijk het interval $(x-1, x+1)$
Omdat $R' = R$ weten we dat $R \cap (x-1, x+1)$ oneindig is.
Er zijn $u$ en $v$ in $(x-1, x+1)$ zodat
- $u, v \notin R$
- $[u,v] \cap R \neq \emptyset$.

Er geldt namelijk het volgende
voor elke $y > x$ is $(x,y) \cap R$ oneindig
of voor elke $y < x$ is $(y,x) \cap R$ oneindig
Als het eerste niet geldt dan is er een $y$ zodat $(x,y) \cap R$ eindig is
Maar dan is voor elke $z < x$ $(z,y) \cap R$ oneindig dus moet $(z,x) \cap R$ oneindig zijn.
Neem $a \in (x-1, x) \cap R$
en $b \in (a,x) \cap R$
Omdat $(a,b)$ niet binnen $R$ ligt kunnen we $u \in (a,b) \setminus R$ nemen
en evenzo $v \in (b,x) \setminus R$.

OMDAT $u < b < v$ GELDT $[u,v] \cap R \neq \emptyset$
EN $R \cap [u,v]$ IS OOK PERFECT
[GOEDE OEFENING DIT TE BEWYZEN.]
WE VERVANGEN $R$ DOOR $R \cap [u,v]$
DUS VAN NU AF AAN: $R$ IS BEGRENSD

$\underset{u}{[}$ - - R - - - - - - $\underset{v}{]}$

(b) ALS $x \notin R$ DAN IS ER EEN MAXIMAAL INTERVAL $(r_x, s_x)$
ZÓ DAT $x \in (r_x, s_x)$ EN
$(r_x, s_x) \cap R = \emptyset$
HET IS MOGELYK DAT $r_x = -\infty$, BIJV ALS $x = u$
OF DAT $s_x = \infty$, BIJV ALS $x = v$.
MAAR NIET BEIDE TEGELYK
OM TE BEGINNEN: ER IS EEN INTERVAL $(a,b)$ OM $x$ MET $(a,b) \cap R = \emptyset$.
IMMERS: $x \notin R'$ DUS ER IS EEN INTERVAL $(a,b)$ OM $x$ ZONDER ANDERE ELEMENTEN VAN $R$ DAN EVENTUEEL $x$, MAAR $x \notin R$ DUS $R \cap (a,b) = \emptyset$
NEEM $A = \{y : x < y$ EN $(x,y) \cap R = \emptyset\}$
EN $B = \{y : x < y$ EN $(x,y) \cap R \neq \emptyset\}$
DAN GELDT $b \in A$ DUS $A \neq \emptyset$
ALS $B = \emptyset$ NEMEN WE $s_x = \infty$
WANT DAN $R \cap \{y : x < y\} = \emptyset$
ALS $B \neq \emptyset$ DAN $A \cap B = \emptyset$
EN ALS $y \in A$ EN $z \in B$ DAN $y < z$.
DEDEKIND'S "WESEN DER STETIGKEIT":
ER IS EEN PUNT $p$ ZÓ DAT
$A = \{y : x < y \leq p\}$ EN $B = \{y : y > p\}$
OF $A = \{y : x < y < p\}$ EN $B = \{y : y \geq p\}$

OMDAT $(x,p) = \bigcup\{(x,y) ; x < y < p\}$
VOLGT DAT HET EERSTE GELDT : $(x,p) \cap R = \emptyset$
WE NEMEN $s_x = p$
NB ER GELDT $s_x \in R$ WANT
ALS $y > s_x = p$ DAN $(x,y) \cap R \neq \emptyset$
EN OMDAT $R = R'$ IS $(x,y) \cap R$ ONEINDIG
ALS $y > s_x$
VERDER $(x,s_x) \cap R = \emptyset$ DUS $[s_x,y) \cap R$
IS ONEINDIG ALS $y > s_x$ EN DUS $s_x \in R' = R$.
CONCLUSIE - $(x, s_x) \cap R = \emptyset$
- $s_x \in R$ ALS $s_x \neq \infty$
EVENZO VINDEN WE $r_x < x$ MET
. $(r_x, x) \cap R = \emptyset$ EN
. $r_x \in R$ ALS $r_x \neq -\infty$
OMDAT R NIET LEEG IS KUNNEN
WE NIET HEBBEN DAT $r_x = -\infty$ ÈN $s_x = \infty$.

(c) VOOR ELKE $x$ EN $y$ NIET IN $R$
GELDT $(r_x, s_x) = (r_y, s_y)$
OF $(r_x, s_x) \cap (r_y, s_y) = \emptyset$.
ALS, $z \in (r_x, s_x) \cap (r_y, s_y)$
DAN IS $(r_x, s_x) \cup (r_y, s_y)$ EEN INTERVAL
DAT R NIET SNIJDT DUS BEVAT IN $(r_z, s_z)$
WEGENS MAXIMALITEIT VINDEN WE
$(r_x, s_x) = (r_z, s_z) = (r_y, s_y)$

(d) DUS ALS $x$ EN $y$ NIET IN R ZITTEN
EN $(r_x, s_x) \neq (r_y, s_y)$
DAN $s_x \leq r_y$ OF $s_y \leq r_x$
ALS $x < y$ OF $y < x$
RESPECTIEVELIJK

(e) ALS $x$ EN $y$ NIET IN $R$ ZITTEN MET $x < y$
EN $(r_x, s_x) \cap (r_y, s_y) = \emptyset$
DAN GELDT ZELFS $s_x < r_y$
WANT $(x, y)$ IS EEN INTERVAL OM $r_y$
DUS $(x, y) \cap R$ IS ONEINDIG
MAAR $(x, y) \cap R = [s_x, r_y] \cap R$

(f) ALS $x$ EN $y$ NIET IN $R$ ZITTEN MET $x < y$
EN $(r_x, s_x) \cap (r_y, s_y) = \emptyset$
DAN IS ER EEN $z$ DIE NIET IN $R$ ZIT
MET $s_x < r_z < s_z < r_y$
NEEM $z$ IN $(s_x, r_y) \setminus R$
DAN $(r_z, s_z) \subseteq (s_x, r_y) \setminus R$
EN DUS, VIA (e), $s_x < r_z$ EN $s_z < r_y$.

(g) ER ZIJN SLECHTS AFTELBAAR ONEINDIG VEEL VERSCHILLENDE INTERVALLEN $(r_x, s_x)$
IMMERS ELK INTERVAL $I$ BEVAT
EEN RATIONAAL GETAL $q_I$ EN
DE KOPPELING $I \mapsto q_I$ IS INJECTIEF
WANT ALS $I \neq J$ DAN $I \cap J = \emptyset$ EN DUS $q_I \neq q_J$.

(h) SAMENGEVAT WE HEBBEN EEN AFTELBARE FAMILIE INTERVALLEN $\mathcal{J}$
MET - ALS $I \neq J$ DAN $I \cap J = \emptyset$
- WE NOTEREN $I = (a_I, b_I)$
MET $a_I = -\infty$ OF $a_I \in R$
EN $b_I = \infty$ OF $b_I \in R$
DAN: ALS $b_I < a_J$
DAN IS ER EEN $K \in \mathcal{J}$
MET $b_I < a_K < b_K < a_J$

- WE NOTEREN $I_0 = (r_u ; s_u)$
  EN $I_1 = (r_v, s_v)$
  DVS $r_u = -\infty$, $s_u \in R$, $r_v \in R$, $s_v = \infty$
  VOOR ELK ANDER INTERVAL $I \in \mathcal{J}$
  GELDT $s_u < a_I < b_I < r_v$

- IETS KORTER: NOTEER
  "HET INTERVAL I LIGT LINKS VAN HET INTERVAL J"
  (OFWEL $b_I < a_J$)
  ALS $I \lhd J$.

DAN HEBBEN WE
- $I_0 \lhd I \lhd I_1$ VOOR ALLE $I \in \mathcal{J}$ ONGELIJK AAN $I_0$ EN $I_1$
- ALS $I \lhd J$ DAN IS ER EEN K ZÓ DAT
  $I \lhd K \lhd J$
- $\mathcal{J}$ IS AFTELBAAR

- BEKIJK $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ DIE VOLDOET AAN
  - $0 < q < 1$ VOOR ALLE q ONGELIJK AAN 0 EN 1
  - ALS $p < q$ DAN IS ER EEN r ZÓ DAT
    $p < r < q$
  - $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ IS AFTELBAAR

(c) STELLING VAN CANTOR

ER IS EEN BIJECTIE
$$f : \mathcal{J} \longrightarrow Q$$
ZÓ DAT $f(I_0) = 0$
$f(I_1) = 1$
VOOR ALLE $I, J \in \mathcal{J}$: $I \lhd J$ DESDA $f(I) < f(J)$

IN HUIDIGE TERMEN: DE STRUCTUREN
$(\mathcal{J}, \lhd)$ EN $(Q, <)$
ZIJN ISOMORF.

07/05/2024

CONSTRUCTIE VAN $f$.

TEL $\mathcal{I}$ EN $\mathbb{Q}$ AF:

$\langle I_m : m \in \mathbb{N} \rangle$ EN $\langle q_m : m \in \mathbb{N} \rangle$

MET $I_0$ EN $I_1$ ALS BOVEN, EN $q_0 = 0$ EN $q_1 = 1$

WE BESCHRIJVEN $f$ RECURSIEF

BEGIN $f(I_0) = q_0 = 0$ EN $f(I_1) = q_1 = 1$

STAP 2 $f(I_2) = q_2$

OMDAT $I_0 \lhd I_2 \lhd I_1$

EN $q_0 < q_2 < q_1$

GELDT VOOR $i, j \leq 2$, ALTIJD

$I_i \lhd I_j$ DESDA $f(I_i) < f(I_j)$.

STAP $m$ $(m \geq 3)$

NEEM AAN DAT VOOR $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$

WE RATIONALE GETALLEN $q_{k_0}, q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots, q_{k_{m-1}}$

HEBBEN BEPAALD ZÓ DAT

VOOR $i, j < m$ GELDT

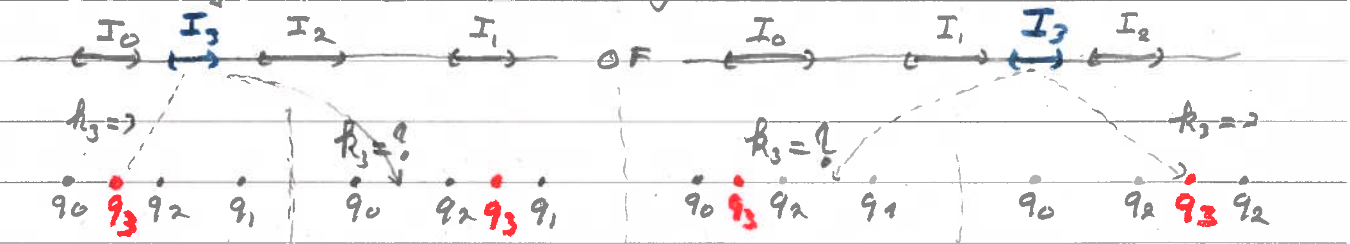
$I_i \lhd I_j$ DESDA $q_{k_i} < q_{k_j}$ $(*)$

(NB $k_0 = 0$, $k_1 = 1$, EN $k_2 = 2$ NATUURLIJK)

WE DOEN EERST HET GEVAL $m = 3$ WANT

DAT KAN MET BEHULP VAN EEN PLAATJE

ER ZIJN TWEE MOGELIJKHEDEN [BETER: VIER]




$f(I_3) = q_3$

$(*)$ GELDT VOOR $i, j < 4$

$k_3 = \min\{k : q_2 < q_k < q_1\}$

$f(I_3) = q_{k_3}$

$(*)$ GELDT VOOR $i, j < 4$

$k_3 = \min\{k : q_0 < q_k < q_2\}$

$f(I_3) = q_{k_3}$

$(*)$ GELDT VOOR $i, j < 4$

$f(I_3) = q_3$

$(*)$ GELDT VOOR $i, j < 4$

IN DEZE TWEE GEVALLEN GELDT $k_3 > 3$.

ALGEMEEN:

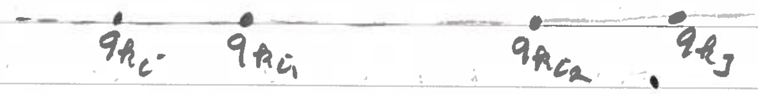
• BEKIJK DE LIGGING VAN $I_m$ TEN OPZICHTE VAN $I_0, I_1, \dots, I_{m-1}$:
NEEM $i_1$ EN $i_2$ ZO DAT

$$I_{i_1} \lhd I_m \lhd I_{i_2}$$

ÈN VOOR ALLE ANDERE $i < m$ GELDT

$$I_i \lhd I_{i_1} \text{ OF } I_{i_2} \lhd I_i$$

. WE HEBBEN




ALS $i < m$ EN $i \neq i_1, i_2$ DAN

$q_{k_i} < q_{k_{i_1}}$ OF $q_{k_{i_2}} < q_{k_i}$ WEGENS (*)

NEEM $k_m = \min\{k : q_{k_{i_1}} < q_k < q_{k_{i_2}}\}$
EN DEFINIEER

$$f(I_m) = q_{k_m}.$$

DAN GELDT (*) VOOR $i, j < m+1$.

DEZE $f$ IS DUIDELIJK INJECTIEF
EN VOLDOET AAN

$$I \lhd J \text{ DESDA } f(I) < f(J)$$

IS $f$ OOK SURJECTIEF?
IS ER EEN $I$ MET $f(I) = 3$?
BEKIJK HET GEVAL $I_0 \lhd I_3 \lhd I_2$ EN $q_2 < q_3 < q_1$
DAAR GOLD $k_3 \neq 3$.
ECHTER ER IS EEN $I$ MET $I_2 \lhd I < I_1$
BEKIJK NEEM DE EERSTE $m$ MET $I_2 \lhd I_m \lhd I_1$
DUS $I_0 \lhd I_i \lhd I_2$ VOOR ALLE $i$
MET $2 < i < m$ EN DUS $k_i \neq 3$ VOOR DIE $i$
CONCLUSIE IN DE ALGEMENE STAP HIERBOVEN
GELDT $i_1 = 2$ EN $i_2 = 1$
EN DAN $k_m = \min\{k : q_2 < q_k < q_1\} = 3$
DUS $f(I_m) = q_3$.

HET ALGEMENE GEVAL VERGT WAT MEER BOEKHOUDING.

① WE HEBBEN NU $f: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Q}$

- $f$ IS BIJECTIEF
- $I \lhd J$ DESDA $f(I) < f(J)$.

DEFINIEER NU $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ ALS VOLGT:

- OP ELK INTERVAL $I$ IS $\varphi$ CONSTANT MET WAARDE $f(I)$.
  DUS WE WETEN WAT $\varphi(x)$ IS ALS $x \notin R$.
- VOOR $x \in R$ BEKIJKEN WE
  $\mathcal{J}_x^- = \{I : I$ LIGT LINKS VAN $x\}$ EN
  $\mathcal{J}_x^+ = \{I : I$ LIGT RECHTS VAN $x\}$
  DAN VORMEN $A_x = \{f(I) : I \in \mathcal{J}_x^-\}$
  EN $B_x = \{f(I) : I \in \mathcal{J}_x^+\}$ EEN DEDEKIND-SNEDE
  EN DIE BEPAALT ÉÉN UNIEK REEEL GETAL EN DAT WORDT $\varphi(x)$.

- ALS $I \in \mathcal{I}$ EN $b_I \in R$ DAN $\varphi(b_I) = f(I)$
  WANT DAN $f(I) = \max A_{b_I}$
  EN ALS $a_I \in R$ DAN OOK $\varphi(a_I) = f(I)$
  WANT DAN $f(I) = \min B_{a_I}$
- ALS $t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ DAN IS ER EEN $x \in R$ MET $\varphi(x) = t$.
  BEKIJK $\mathcal{J}_t^- = \{I : f(I) < t\}$ EN $\mathcal{J}_t^+ = \{I : f(I) > t\}$
  DAN GELDT $\{f(I) : I \in \mathcal{J}_t^-\} = \{q \in \mathbb{Q} : q < t\}$
  EN $\{f(I) : I \in \mathcal{J}_t^+\} = \{q \in \mathbb{Q} : q > t\}$
  WEGENS DE SURJECTIVITEIT VAN $f$

07/05/2024

WE WETEN:

ALS $I \in J_t^-$ EN $J \in J_t^+$ DAN $I \triangleleft J$

EN DUS $b_I < a_J$

VIA DEDEKIND'S "WESEN DER STETIGKEIT"

VINDEN WE $x$ EN $y$ ZÓ DAT

- ALS $I \in J_t^-$ DAN $b_I \leq x$

  EN ALS $z < x$ DAN IS ER EEN

  $I \in J_t^-$ MET $z < b_I$

- ALS $J \in J_t^+$ DAN $y \leq a_J$

  EN ALS $y < z$ DAN IS ER EEN

  $J \in J_t^+$ MET $a_J < z$.

DAN GELDT $x \leq y$

MAAR $x < y$ IS NIET MOGELIJK

WANT $(x,y) \cap I = \emptyset$ VOOR ALLE $I \in J$

EN DUS ZOU $(x,y) \subseteq R$ GELDEN

MAAR $R$ BEVAT GEEN INTERVAL.

DUS $x = y \in R$ EN $t = \varphi(x)$.

CONCLUSIE $\varphi$ BEELDT $R$ AF OP $[0,1]$

DUS $R$ HEEFT TEN MINSTE ZOVEEL

ELEMENTEN ALS $[0,1]$.

MEER KAN NIET WANT $R \subseteq \mathbb{R}$.

KLAAR

!

NIEUW ONTWIKKELDE NOTIES:

VERDICHTINGSPUNT, AFGELEIDE VERZAMELING,

GESLOTEN VERZAMELING, HOGERE (TRANSFINIETE)

AFGELEIDEN EN DUS NIEUWE INDEXVERZAMELINGEN,

PERFECTHEID, SPLITSING IN AFTELBAAR + PERFECT,

ANALYSE COMPLEMENT VAN PERFECTE VERZ'N

STRUCTUURSTELLING, ~~UITBREIDING TOT~~

SURJECTIE $: R \to [0,1]$.