# $\aleph$ en $\infty$

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 15 mei 2024

# Het logo

| | | |
|---|---|---|
| $\aleph_0$ | $\aleph_1$ | $2^{\aleph_0}$ |
| $\infty$ | $\pi$ | $\sqrt{2}$ |

We moeten het nog even over de eerste rij hebben.

# Cantor's definitie

## Definitie (1895)

‚Mächtigkeit' oder ‚Kardinalzahl' von $M$ nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge $M$ hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente $m$ und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.
Das Resultat dieses zweifachen Abstractionsacts, die Kardinalzahl oder Mächtigkeit von $M$, bezeichnen wir mit

$$\overline{\overline{M}}$$

# Cantor's definitie

## Vertaling van Ph. E. B. Jourdain (1915)

We call by the name "power" or "cardinal number" of $M$ the general concept which, by means of our active faculty of thought, arises from the aggregate $M$ when we make abstraction of the nature of its various elements $m$ and of the order in which they are given.

We denote the result of this double act of abstraction, the cardinal number or power of $M$, by

$$\overline{\overline{M}}$$

# Cantor's uitleg

Elk element van $M$ wordt, als we van alle eigenschappen afzien, een 'eenheid' (in het Duits: een 'Eins'). Het kardinaalgetal $\overline{\overline{M}}$ is dan zelf een welbepaalde verzameling die uit louter 'eenheden' bestaat.

Dit klinkt niet echt werkbaar, maar Cantor ging, gelukkig, verder.

$M \sim N$ betekent, in huidige termen, dat er een bijectie tussen $M$ en $N$ bestaat.
Dat hadden we vorige keer al afgesproken.

# Cantor's uitleg en karakterisering

## Stelling

*Uit* $M \sim N$ *volgt* $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$
*en*
*uit* $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ *volgt* $M \sim N$

## Bewijs.

Als $M \sim N$ dan leidt de abstractie tot dezelfde verzameling.

De abstractie levert een bijectie tussen $M$ en $\overline{\overline{M}}$.
Dus als $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ krijgen we via deze verzameling een bijectie tussen $M$ en $N$. $\square$

In de rest van het werk zien we overal expliciete bijecties.

# $\aleph_0$

De eerste notatie: $\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$. "Dit is het kleinste transfiniete kardinaalgetal."
Met het 'bewijs' dat op de achtergrond het keuzeaxioma nodig heeft.

NB $\aleph_0$ is niet meer dan een door Cantor ontworpen label.
En $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$ betekent niets meer en niets minder dan "er is een bijectie tussen $X$ en $\mathbb{N}$".

# $\aleph_0$

Cantor ontwikkelde een rekenkunde voor kardinaalgetallen:

- $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$: via verenigingen van disjuncte verzamelingen
- $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$: via productverzamelingen
- $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$: via verzamelingen van afbeeldingen

Voor $\aleph_0$ gelden

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0^n = \aleph_0$, voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n > 0$.

In alle gevallen te *bewijzen* door geschikte bijecties aan te geven.

# $2^{\aleph_0}$

Per definitie is $2^{\aleph_0}$ het kardinaalgetal van de verzameling $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ van afbeeldingen van $\mathbb{N}$ naar $\{0,1\}$.

Het label is niet nieuw, maar samengesteld uit twee andere.
Omdat de verzameling met behulp van reeds gelabelde verzamelingen gemaakt is.

Eigenschappen:

- $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
- $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (!)
- $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (!)

# $\mathfrak{c}$

Cantor plakte het label $\mathfrak{o}$ op $\mathbb{R}$, dus $\mathfrak{o} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Tegenwoordig gebruiken we $\mathfrak{c}$, dus $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \mathfrak{c}$.

En we hebben gezien dat er bijecties zijn tussen $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]$, $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, ...

Die krijgen allemaal label $\mathfrak{c}$.

# $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

**Stelling**

$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

**Bewijs.**

Gebruik de reparatie uit de aantekeningen van 24-04-2024 van Cantor's niet correcte bewijs van $[0,1] \sim [0,1]^2$, die correctie werkt voor elk natuurlijk getal $n$ en geeft telkens een bijectie tussen $n^{\mathbb{N}}$ en $[0,1]$.
In het bijzonder tussen $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ dus. $\square$

## $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Met gebruik van de gelijkheden voor $2^{\aleph_0}$ krijgen we nu:

- $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
- $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
- $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Cantor was hiermee zeer in zijn nopjes: op deze manier kan ik met een paar pennestreken aantonen dat $[0, 1]$ en $[0, 1]^n$ en ook $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ allemaal hetzelfde kardinaalgetal hebben.

# $\aleph_1$

### Definitie

De tweede getallenklasse $Z(\aleph_0)$ is het geheel der orde-typen van welgeordende verzamelingen met kardinaalgetal $\aleph_0$.

Tussen $\aleph_0$ en $\overline{\overline{Z(\aleph_0)}}$ zit geen ander kardinaalgetal.
(Dat kost Cantor enige bladzijden werk.)
Conclusie $\overline{\overline{Z(\aleph_0)}}$ is het kleinste kardinaalgetal groter dan $\aleph_0$, en dus $\overline{\overline{Z(\aleph_0)}} = \aleph_1$

Cantor (ging er vanuit)/(dacht dat hij bewezen had) dat de kardinaalgetallen allemaal vergelijkbaar waren.
Aangezien er geen grootste kardinaalgetal is moet elk kardinaalgetal een directe opvolger hebben; die kardinaalgetallen op volgorde zijn dan

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$$

# De Continuümhypothese redux

De verzameling $Z(\aleph_0)$ "voldoet" aan de Continuümhypothese, in die zin dat voor elke oneindige deelverzameling $X$ van $Z(\aleph_0)$ geldt:

$$\overline{\overline{X}} = \aleph_0 \qquad \text{of} \qquad \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Z(\aleph_0)}}$$

Met wat extra tussenresultaten (met gebruik van het Keuzeaxioma) volgt dat Cantor's Continuümhypothese equivalent is met

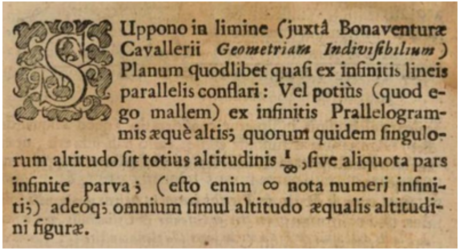
$$\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{Z(\aleph_0)}}$$

of, zoals hij nu in vrijwel alle boeken staat:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

# John Wallis

Aan Wallis hebben we het symbool voor 'oneindig' te danken:



SUppono in limine (juxtâ Bonaventuræ Cavallerii *Geometriam Indiviſibilium*) Planum quodlibet quaſi ex infinitis lineis parallelis conflari: Vel potiùs (quod ego mallem) ex infinitis Prallelogrammis æquè altis; quorum quidem ſingulorum altitudo ſit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, ſive aliquota pars infinite parva; (eſto enim $\infty$ nota numeri infiniti;) adeóq; omnium ſimul altitudo æqualis altitudini figuræ.

In *De sectionibus conicis* (1655) staat op pagina 4:

*efto enim* $\infty$ *nota numeri infiniti*

# John Wallis

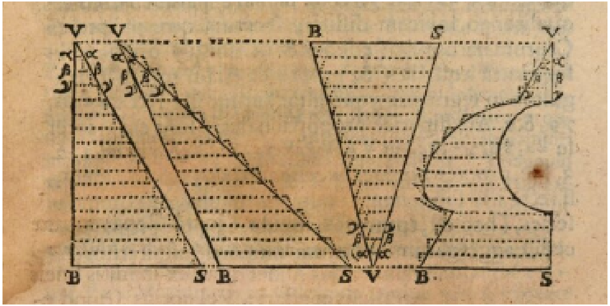
Context: Wallis verwijst naar Bonaventura Cavalieri die oppervlakten bepaalde door de gebieden in oneindig dunne lijntjes te verdelen en die bij elkaar op te tellen.

Geparafraseerd: de figuur wordt verdeeld in oneindig veel [horizontale] parallellogrammen van hoogte $\frac{1}{\infty}$ (waar $\infty$ een oneindig getal is) en wel zo dat de totale hoogte gelijk is aan de hoogte van de figuur.

Een (verre) voorloper van de Riemann-integraal dus.

# Het principe van Cavalieri

Als in twee figuren elke horizontale lijn stukken van gelijke lengte afsnijdt dan zijn de oppervlakten van de figuren gelijk.




Cavalieri wist hiermee van eenvoudige gebieden de oppervlakte te bepalen:
Zie Pythagoras **37** (1997/8) voor een voorbeeld.

# Tegenwoordig

Het symbool $\infty$ wordt te pas en te onpas gebruikt in vrijwel alle delen van de wiskunde.

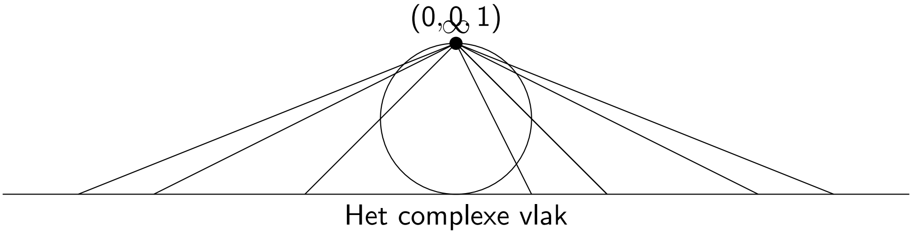
Soms is het niet meer dan een punt dat gebruikt wordt om een gat te dichten.

Soms doet het dienst als getal.

Soms is het niet meer dan een teken dat afkortingen mogelijk maakt.

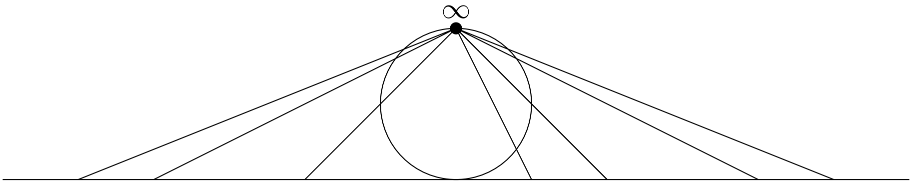
# De Riemann-sfeer

Een zijaanzicht van de echte situatie:




Riemann maakte van het platte vlak (de complexe getallen) een boloppervlak door elk punt van het vlak stereografisch op de sfeer te projecteren.
Hij dichtte het gat aan de Noordpool met een extra punt: $\infty$.
Een zeer vruchtbaar idee in de Complexe-Functietheorie.

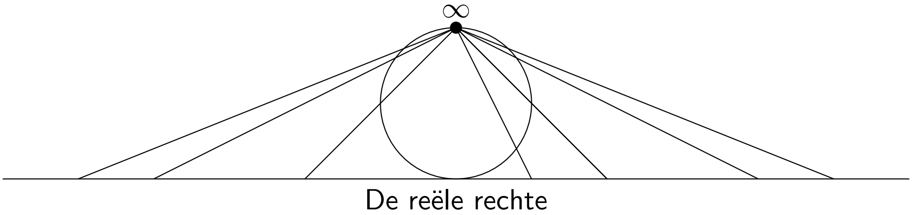
# De Riemann-sfeer




Het complexe vlak

Het geeft een goede manier het gedrag van complexe functies "nabij $\infty$" te bestuderen.

# Een gat in $\mathbb{R}$




Een manier om heel $\mathbb{R}$ naar je toe te trekken.

# Twee gaten in $\mathbb{R}$

$$-\infty \;\text{—————————————}\; \infty$$

Gebruikt van $\mathbb{R}$ een gesloten interval te maken.
Dat heeft zo af en toe zijn nut.

Maar het is ook nogal link . . .

# Rekenen met $\infty$

Zie *Rekenen met oneindig* in *Blik op Oneindig* voor een poging.

Voeg een element $\infty$ toe aan $\mathbb{N}$ en noem het resultaat $\mathrm{Super}\mathbb{N}$.
En spreek af dat $n < \infty$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

Een belangrijke vaststelling in die context: *jij* hebt iets nieuws aan $\mathbb{N}$ toegevoegd.
Het is dus aan *jou* om daar verstandige rekenregels voor te definiëren.

De afspraken voor $+$ en $\times$ in het boek geven weinig aanleiding tot problemen.
(Even op de borden werken.)
$0 \times \infty = 0$ is de minst bezwaarlijke afspraak voor $0 \times \infty$.

## Rekenen met $\infty$

In de gewone $\mathbb{N}$ zijn aftrekken en delen afgeleide bewerkingen en gedefinieerd in termen van $+$ en $\times$.

En ondubbelzinnig!
$n - m$ is niet gedefinieerd als $n < m$
Als $n \geqslant m$ dan is $n - m$ die $k$ die voldoet aan $m + k = n$. (En er is één zo'n $k$.)

Dan: $\infty - n = \infty$ want $n + \infty = \infty$, en $\infty$ is uniek.

En: $\infty - \infty = ??$, want we hebben keuze te over:
$\infty + 0 = \infty$, $\infty + 1 = \infty$, ..., $\infty + \infty = \infty$.

Over delen zullen we het maar niet hebben.
NB Wallis schreef niet dat $\frac{1}{\infty} = 0$, alleen dat $\infty$ 'oneindig groot' was, en kennelijk impliciet dat $\frac{1}{\infty}$ 'oneindig klein' was.

# $\infty$ als 'reëel getal'

$$-\infty \;\rule{10cm}{0.4pt}\; \infty$$

In de oude Analyse werd vaak met dit beeld gewerkt, waarbij $\infty$ als een soort 'oneindig reëel getal' werd beschouwd/geïnterpreteerd.

De rekenregels in deze $\mathrm{Super}\mathbb{R}$ zagen er min of meer uit als die in de $\mathrm{Super}\mathbb{N}$.

Het verschil was dat men op zoek ging naar de 'juiste' rekenregels.

Dat leidde tot allerlei beschouwingen die nu wat curieus aandoen.

# Curiosum

Er is een lang artikel over de geschiedenis van trigonometrische reeksen (Deutsch gründlig, 535 pagina's) waarin de schrijver (H. Burkhardt) een pause van acht pagina's inlast om alle pogingen te bespreken van eerdere wiskundigen te ontdekken/definiëren wat de waarden van

$$\sin\infty \qquad \text{en} \qquad \cos\infty$$

(zouden moeten) zijn.

Dat is ondoenlijk zolang men één enkel 'oneindig groot getal' aan $\mathbb{R}$ toevoegt.

# Rekenen met $\infty$

In Hoofdstuk 6 van *Blik op Oneindig* wordt een andere poging gedaan met oneindig grote (en oneindig kleine) getallen te rekenen.

Die is meer in de geest van het begin van de Analyse en lijkt op hoe de Bernoulli's, Euler, en anderen met die grootheden omsprongen.

Het grote verschil is dat er niet één getal $\infty$ wordt toegevoegd maar een hele 'wolk' van oneindig grote getallen en wel zó dat alle rekenregels van $\mathbb{R}$ behouden blijven.

Die manier om met oneindig grote getallen te werken heet nu Niet-Standaard Analyse.

In de komende twee weken zal ik daar wat aandacht aan besteden.

# Limieten

In het eerste jaar maakt elke wiskundestudent (en vele anderen) kennis met deze twee uitdrukkingen.

$$\lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{en} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

En wat is de functie van $\infty$ daar?

# Limieten

Wat betekent

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L?$$

Dit dus:

**Definitie**

Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geqslant N$ geldt

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

# Limieten

Voor wie van symbolen houdt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n \geqslant N \to |x_n - L| < \varepsilon\big)$$

Merk op dat $\infty$ hier niet meer te zien is.

Laten we naar een paar voorbeelden kijken.

# Voorbeelden

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \ldots$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \ldots$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \ldots$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ldots$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \ldots$