① DE RIJ $\langle (1+\frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \rangle$ IS STIJGEND

NEEM $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. WE MOETEN LATEN ZIEN DAT

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

BEKIJK HUN QUOTIENT:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

OMWERKEN: $\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$

DAT WORDT $\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$

HERINNER VAN [22-05-2024] DE ONGELIJKHEID VAN BERNOULLI:

ALS $x > -1$ EN $n \geq 1$ DAN

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

ER GELDT $-\frac{1}{(n+1)^2} > -1$ EN DUS

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$$

WE VINDEN DUS

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)$$

UITWERKEN $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3}$$ [ONDER ÉÉN NOEMER]

$$= 1 + \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{(n+1)^3}$$

$$= 1 + \frac{n^2+2n+1-n^2-n-n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3}$$

CONCLUSIE $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$> \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

② VOOR WE VERDER GAAN EERST OPGAVE 2F UIT "ANALYSE VOOR BEGINNERS"
DIE HEEFT TE MAKEN MET DE ONGELIJKHEID VAN BERNOULLI [ZIE 22-05-2024 OF STELLING 2.3 IN HET BOEK VAN VAN ROOIJ]
DE OPGAVE HEEFT TWEE DELEN:

ⓐ ALS $n \in \mathbb{N}$ EN $x > -1$ DAN GELDT

$$(1-(n+1)x)(1+x)^{n+1} \leq (1-nx)(1+x)^n$$

TREK LINKS VAN RECHTS AF:

$$(1-nx)(1+x)^n - (1-(n+1)x)(1+x)^{n+1}$$
$$= (1+x)^n \cdot (1-nx-(1-(n+1)x)(1+x))$$
$$= (1+x)^n \cdot (\cancel{1} - \cancel{nx} - \cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{(n+1)x} + (n+1)x^2)$$
$$= (1+x)^n \cdot (n+1)x^2$$
$$\geq 0 \quad \text{OMDAT } 1+x > 0$$

MERK OP ALS $x \neq 0$ DAN KRIJGEN WE STRICTE ONGELIJKHEID

ⓑ VOOR ALLE $n \in \mathbb{N}$ EN $x > -1$ GELDT

$$(1-nx)(1+x)^n \leq 1$$

IMMERS VOOR $n=0$ STAAT ER

$$(1-0 \cdot x) \cdot (1+x)^0 = 1$$

ONDERDEEL ⓐ GEEFT NU

$$\begin{aligned} 1 &\geq (1-x)(1+x) \\ &\geq (1-2x)(1+x)^2 \\ &\geq (1-3x)(1+x)^3 \\ &\geq (1-nx)(1+x)^n \; ---- \end{aligned}$$

ⓒ $(1-nx)(1+x) \leq 1$ KUN JE HERSCHRIJVEN
ALS $1-nx \leq (1+x)^{-n}$ $(x > -1)$
DUS BERNOULLI GELDT OOK VOOR NEGATIEVE n.
ALS $1-nx > 0$ VOLGT OOK

$$(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$$

③ DE RIJ $\langle (1+\frac{1}{n})^{n+1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \rangle$ IS DALEND

ALS IN ① DELEN WE TERM $n+1$ DOOR TERM n.

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)}$$

$$= (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= (1+\frac{1}{n+1})^{n+2} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

PAS ②ⓒ TOE MET $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$

ER GELDT $1-(n+1)x = 1+\frac{1}{n+1} > 0$

EN DUS [LET OP DE TEKENS!]

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{1+\frac{n+1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$$

HET QUOTIËNT IS DUS KLEINER DAN

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

CONCLUSIE:

$$(1+\tfrac{1}{1})^1 < (1+\tfrac{1}{2})^2 < (1+\tfrac{1}{3})^3 \ldots\ldots (1+\tfrac{1}{3})^4 < (1+\tfrac{1}{2})^3 < (1+\tfrac{1}{1})^2$$

WE ZIEN DUS HOE DICHT $(1+\frac{1}{n})^n$ BIJ e LIGT: VOOR ALLE n GELDT

$$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

ER GELDT

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n}$$

DUS OOK

$$e - (1+\frac{1}{n})^n < \frac{e}{n}$$

④ HET BEWIJS DAT INDERDAAD

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

ⓐ OP DE SLIDES STAAT

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

WANT

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

ⓑ NU ANDERSOM WE BEWIJZEN:
VOOR ELKE m IS ER EEN n
ZO DAT

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

WE GEBRUIKEN DAT

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!}+\frac{1}{(m+1)!}$$

NEEM $n \geq m+1$ EN SCHRIJF $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ UIT

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^{m+1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

NATUURLIJK $>$ ALS $n > m+1$

WE KRIJGEN ZO EEN RIJ DIE BEGINT
BIJ $n = m+1$

$$\left\langle \sum_{k=0}^{m+1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} : n\in\mathbb{N},\ n\geq m+1 \right\rangle$$

NEEM k VAST EN KIJK WEER NAAR

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-(k-1))}{n}$$

WE WETEN $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n} = 1$, ...,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-(k-1)}{n} = 1$$

WE ACCEPTEREN DE REKENREGELS VOOR LIMIETEN
EN CONCLUDEREN DAT VOOR ELKE k GELDT

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot 1\cdots 1 = \frac{1}{k!}$$

EN VERVOLGENS DAT VOOR ONZE VASTE m GELDT

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m+1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m+1}\frac{1}{k!}$$

ER IS DUS EEN N ZÓ DAT VOOR $n \geq N$ GELDT

$$\left|\sum_{k=0}^{m+1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{m+1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right| < \frac{1}{(m+1)!}$$

VOOR DIE n GELDT DAN

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

EN DUS OOK $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$